Allgemeine Anwendungen

Zum Mathematik-Lehrbuch „Notwendig und zunächst hinreichend“ (Shaker Verlag, Aachen) gibt es mehrere PDF-Dokumente mit ergänzenden Beispielen und Aufgaben, die die Anwendung der mathematischen Grundlagen in ingenieurrelevanten Bereichen zeigen.

Im vorliegenden Dokument finden Sie eine Sammlung von allgemein interessanten Beispielen und Aufgaben:

Überprüfung einer Rechenregel für Exponentialfunktionen – Aktiengewinne – Kreis und Polynomgleichung – Papierfalten – Fahrzeugbewegung – Dreibein – Schließen einer Kreisöffnung – Schnittkurve von Kreiszylindern – Fläche einer Ellipse – Fahrt durch den Regen – Flächeninhalts- und Schwerpunktsberechnung in Polarkoordinaten – KEPLERsche Gesetze

v1.0

Mit den Hilfsformeln

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

kann man aus dem Produkt der jeweils ersten vier Terme der Exponentialfunktionen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots$$

die Bestätigung der Formel

$$\boxed{e^x \cdot e^y = e^{(x+y)}}$$

in den ersten vier Summanden erhalten und ansatzweise erkennen, wie die nächsten Summanden entstehen.

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right) =$$

$$= \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right) + x\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right) + \frac{x^2}{2!}\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right)$$

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \cdot \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right) =$$

$$= 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} +$$

$$+ \left(\frac{xy^3 + x^3y}{3!} + \frac{x^2y^2}{2!2!}\right) + \left(\frac{x^2y^3 + x^3y^2}{2!3!}\right) + \frac{x^3y^3}{3!3!}$$

Mit den Umformungen

$$\frac{a}{3!}+\frac{b}{2!2!}=\frac{a}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{b}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}=\frac{a}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2\cdot 3\cdot b}{1\cdot 4\cdot 2\cdot 3}=\frac{4a+6b}{4!}$$

$$\frac{a}{2!3!}=\frac{a}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=\frac{a}{1\cdot 3\cdot 4}=\frac{2\cdot a}{4!}=\frac{10\cdot a}{5!}$$

$$\frac{a}{3!3!}=\frac{a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=\frac{a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6}=\frac{4\cdot 5\cdot a}{6!}=\frac{20\cdot a}{6!}$$

erhält man schließlich das Ergebnis

$$\begin{aligned}&\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\cdot\left(1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}\right)=\\&=\left(1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2!}+\frac{(x+y)^3}{3!}\right)+\\&\quad+\left(\frac{4xy^3+4x^3y+6x^2y^2}{4!}\right)+\left(\frac{10x^2y^3+10x^3y^2}{5!}\right)+\frac{20x^3y^3}{6!}\end{aligned}$$

In den drei letzten Termen erkennt man durch Vergleich mit den Hilfsformeln bereits Bestandteile von $(x+y)^4$, $(x+y)^5$ und $(x+y)^6$.

✎ ________________________________

Weshalb man an der Börse schneller arm als reich werden kann, wenn man mit geliehenem Geld spekuliert, beschreibt der Autor H. Fürstenwerth in seinem spannenden Buch „*Geld arbeitet nicht*". Hier eine Version in Formeln für andere Parameter:

Anfangsbedingungen zu Beginn der Spekulation:

Aktienpreis: $P_A(0)$
Eigenkapital beim Aktienkauf: $K_E(0)$
Leihkapital beim Aktienkauf: $K_L(0)$

$$P_A(0)=K_E(0)+K_L(0) \qquad \begin{aligned}K_E(0)&=q\cdot P_A(0)\\K_L(0)&=(1-q)\cdot P_A(0)\end{aligned} \qquad q\le 1$$

Nach einem Jahr wird die Aktie verkauft und die Bilanz sieht so aus:

Einnahme aus Aktienverkauf :

$$P_A(1) = (1+\alpha) \cdot P_A(0) \qquad \alpha > 0 \text{ oder } \alpha < 0$$

Rückzuzahlendes Leihkapital bei einem Zinssatz λ:

$$K_L(1) = (1+\lambda)(1-q) \cdot P_A(0)$$

Eigenkapital nach einem Jahr

$$K_E(1) = P_A(1) - K_L(1)$$

$$K_E(1) = (1+\alpha)P_A(0) - (1+\lambda)(1-q)P_A(0)$$

$$K_E(1) = (\alpha + q - \lambda(1-q))P_A(0)$$

Kapitalstandsveränderung nach einem Jahr:

$$\Delta K_E = K_E(1) - K_E(0)$$

$$\Delta K_E = (\alpha + q - \lambda(1-q))P_A(0) - q \cdot P_A(0)$$

$$\Delta K_E = (\alpha - \lambda(1-q)) \cdot P_A(0)$$

Eigenkapitalrendite in einem Jahr:

$$\boxed{R_E(1) := \frac{\Delta K_E}{K_E(0)} = \frac{\alpha - \lambda + q\lambda}{q}}$$

Um 20% gestiegener Aktienpreis

q	α	λ	$R_E(1)$
1	0,2	0,1	0,2 = 20%
0,2	0,2	0,1	0,6 = 60%
0,1	0,2	0,1	1,1 = 110%

Um 20% gefallener Aktienpreis

q	α	λ	$R_E(1)$
1	−0,2	0,1	−0,2 = −20%
0,2	−0,2	0,1	−1,4 = −140%
0,1	−0,2	0,1	−2,9 = −290%

✎

Welche Bedingung muss die Konstante C_3 erfüllen, damit das Polynom 2. Grades

$$x^2 + y^2 + C_1 x + C_2 y + C_3 = 0$$

die Gleichung eines Kreises ist? Für diesen Fall berechne man die Koordinaten x_M und y_M des Kreismittelpunktes und den Radius r des Kreises.

Die Gleichung eines Kreises mit dem Radius r um den Punkt mit den Koordinaten x_M und y_M lautet:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2xx_M + x_M{}^2 + y^2 - 2yy_M + y_M{}^2 = r^2$$

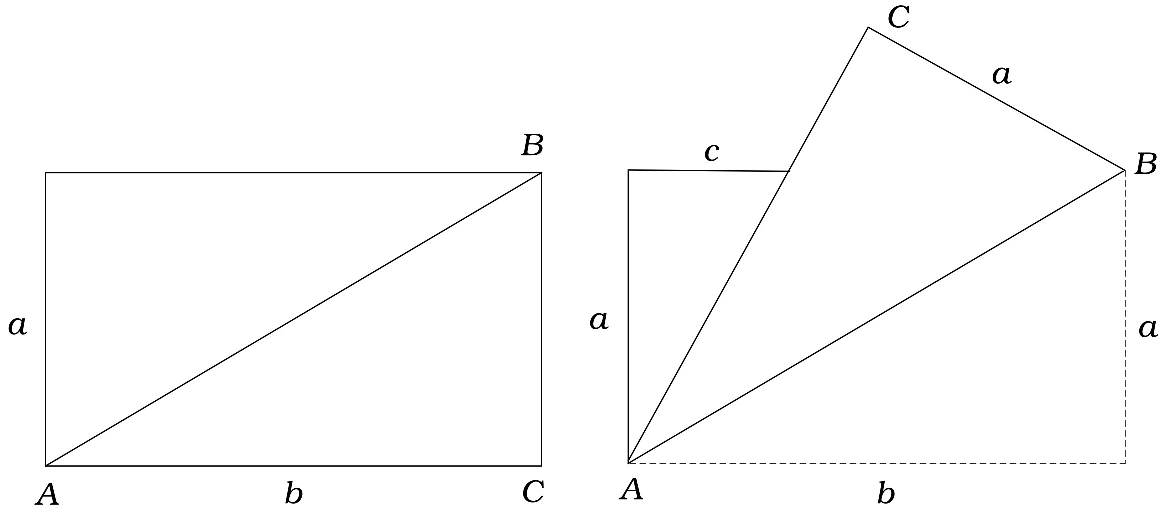
Ein Koeffizientenvergleich ergibt:

$$C_1 = -2x_M, \quad C_2 = -2y_M, \quad C_3 = x_M{}^2 + y_M{}^2 - r^2$$

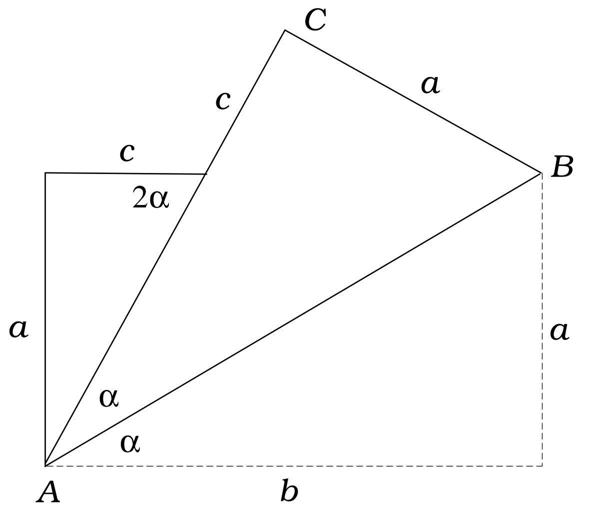
$$x_M = -\frac{C_1}{2}, \quad y_M = -\frac{C_2}{2}, \quad r = \sqrt{\frac{C_1{}^2}{4} + \frac{C_2{}^2}{4} - C_3}$$

$$\boxed{C_3 < \frac{C_1{}^2 + C_2{}^2}{4}}$$

✎ ______________________________



Ein rechteckiges Blatt Papier wird über die Diagonale *AB* umgefaltet. Man berechne den Kantenabschnitt *c*.

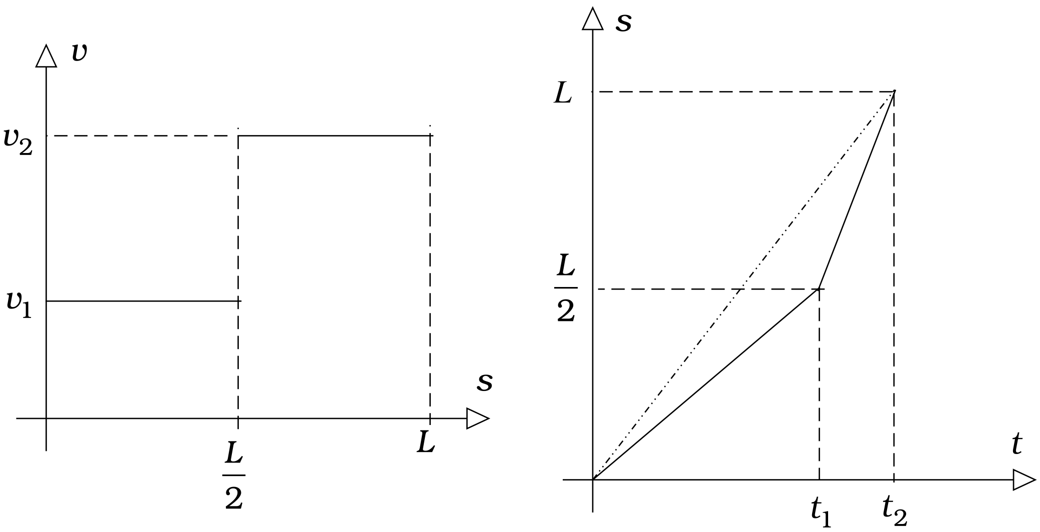


$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}, \qquad \tan(2\alpha) = \frac{a}{c},$$

$$c = \frac{a}{\tan(2\alpha)} = a\frac{1-\left(\tan(\alpha)\right)^2}{2\tan(\alpha)} = a\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}{2\left(\frac{a}{b}\right)} = a\frac{b^2-a^2}{2ab}$$

$$\boxed{c = \frac{b^2-a^2}{2b}}$$

Ein Fahrzeug legt eine Strecke L zurück. Die erste Hälfte fährt es mit der Geschwindigkeit v_1, die zweite Hälfte mit der Geschwindigkeit $v_2 > v_1$.
Mit welcher konstanten Geschwindigkeit v_k müsste es fahren, wenn es die Strecke L in der gleichen Zeit zurücklegen soll?



Im ersten Abschnitt des Weges gilt das Weg-Zeit-Gesetz:

$$s(t) = v_1 t\ .$$

Daraus folgt

$$\frac{L}{2} = v_1 t_1 \qquad t_1 = \frac{L}{2v_1}$$

Im zweiten Abschnitt des Weges lautet das Weg-Zeit-Gesetz

$$s(t) = \frac{L}{2} + v_2(t - t_1) \qquad t \geq t_1$$

und aus $s(t_2) = L$ folgt

$$L = \frac{L}{2} + v_2\left(t_2 - t_1\right) \qquad \rightarrow \qquad \left(t_2 - t_1\right) = \frac{L}{2v_2}\ .$$

Die gesamte Fahrzeit ist also

$$t_2 = t_1 + \frac{L}{2v_2} = \frac{L}{2v_1} + \frac{L}{2v_2} = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)$$

$$t_2 = \frac{L}{2}\frac{\left(v_1 + v_2\right)}{v_1 v_2}$$

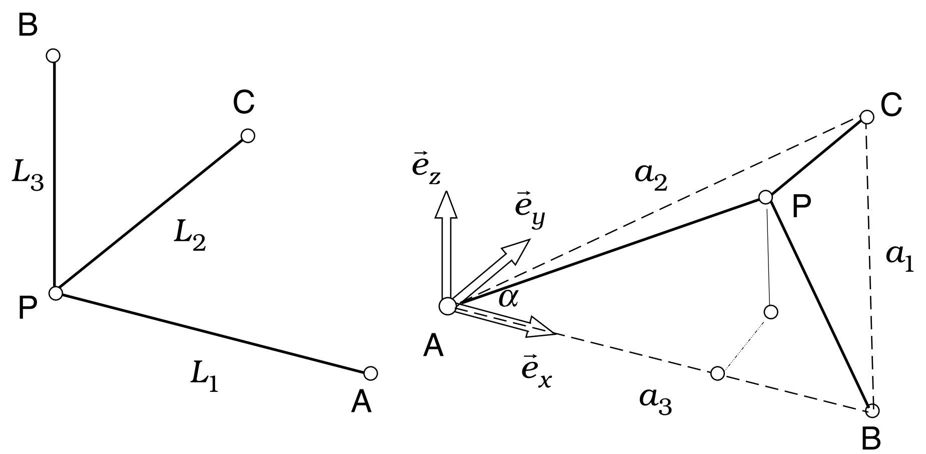
Wenn die Strecke L in dieser Zeit mit der konstanten Geschwindigkeit v_k durchfahren werden soll, muss

$$L = v_k t_2$$

sein, also

$$\boxed{v_k = \frac{L}{t_2} = \frac{2\,v_1 v_2}{v_1 + v_2}}$$

✎ ______________________________



Drei Stäbe mit den Längen L_1, L_2 und L_3 sind im Punkt P zu einem starren, *orthogonalen* Dreibein verbunden. Dieses Dreibein wird mit den Punkten A, B und C auf die xy-Ebene einer kartesischen Basis gestellt, wobei die Punkte A und B auf der x-Achse des Koordinatensystems liegen sollen. Man berechne die Koordinaten des Punktes P.

Mit dem Satz von PYTHAGORAS wird:

$$\boxed{a_1 := \sqrt{{L_2}^2 + {L_3}^2}, \quad a_2 := \sqrt{{L_1}^2 + {L_2}^2}, \quad a_3 := \sqrt{{L_1}^2 + {L_3}^2}}$$

Der Cosinussatz liefert eine Beziehung für den Winkel α:

$${a_1}^2 = {a_2}^2 + {a_3}^2 - 2a_2 a_3 \cos(\alpha)\,, \qquad \cos(\alpha) = \frac{{a_2}^2 + {a_3}^2 - {a_1}^2}{2a_2 a_3}\,,$$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - (\cos(\alpha))^2}\;,$$

Damit lassen sich die Koordinaten des Punktes C berechnen:

$$\boxed{x_C = a_2\cos(\alpha), \quad y_C = a_2\sin(\alpha), \quad z_C = 0}$$

Aus der Orthogonalitätsbedingung für die Schenkel des Dreibeins folgt:

$$\overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{BP} = 0$$

$$\overrightarrow{AP} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{BP} = \begin{bmatrix} -(a_3 - x_P) \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \overrightarrow{AP} - a_3\vec{e}_x$$

$$L_1^{\,2} - a_3 x_P = 0 \qquad \boxed{x_P = \frac{L_1^{\,2}}{a_3}}$$

Weil auch

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}, \qquad \overrightarrow{CP} \circ \overrightarrow{AP} = 0$$

ist, wird

$$\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AP} = L_1^2$$

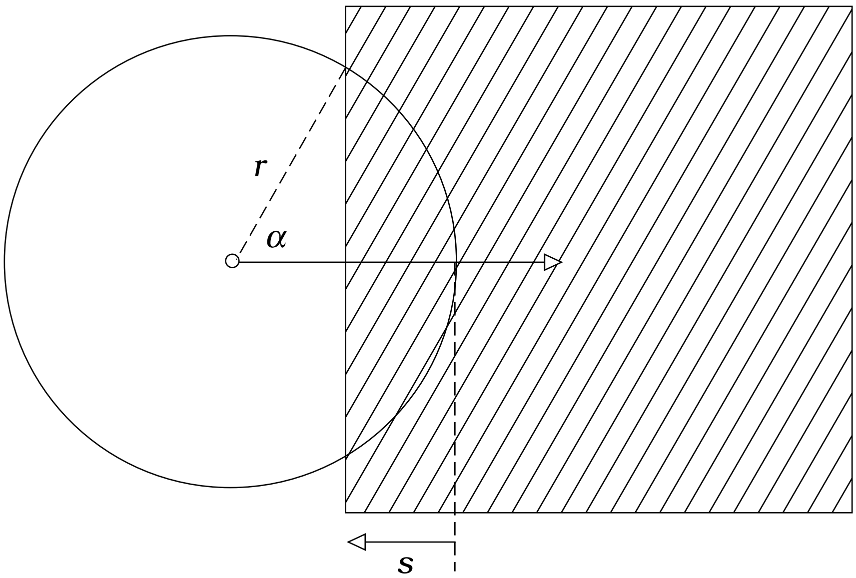
$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = L_1^{\,2}, \qquad x_C x_P + y_C y_P = L_1^{\,2}, \qquad \boxed{y_P = \frac{L_1^{\,2} - x_C x_P}{y_C}}$$

und schließlich

$$\boxed{z_P = \sqrt{L_1^{\,2} - \left(x_P^{\,2} + y_P^{\,2}\right)}}$$

✎ ______________________________

Über eine kreisförmige Öffnung werden unterschiedliche Abdeckplatten geschoben.
Bei einer quadratischen Abdeckplatte berechne man die freie Öffnung als Funktion des Schieberweges s und bei einer Kreisplatte die freie Öffnung als Funktion des Winkels α .



Mit der geometrischen Bedingung

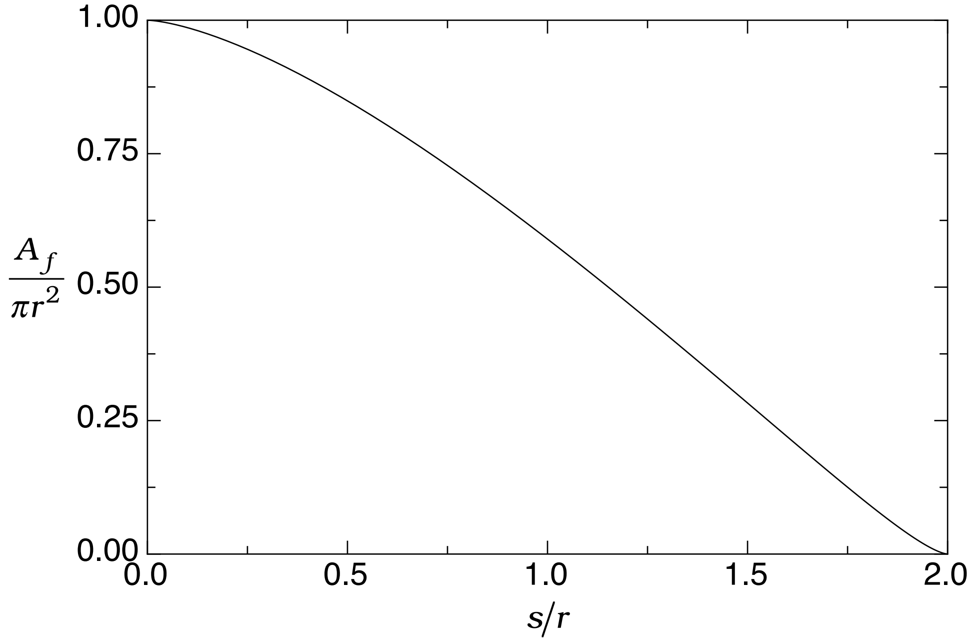
$$r\cos(\alpha) = r - s \qquad \boxed{\alpha(s) = \arccos(1 - \frac{s}{r})}$$

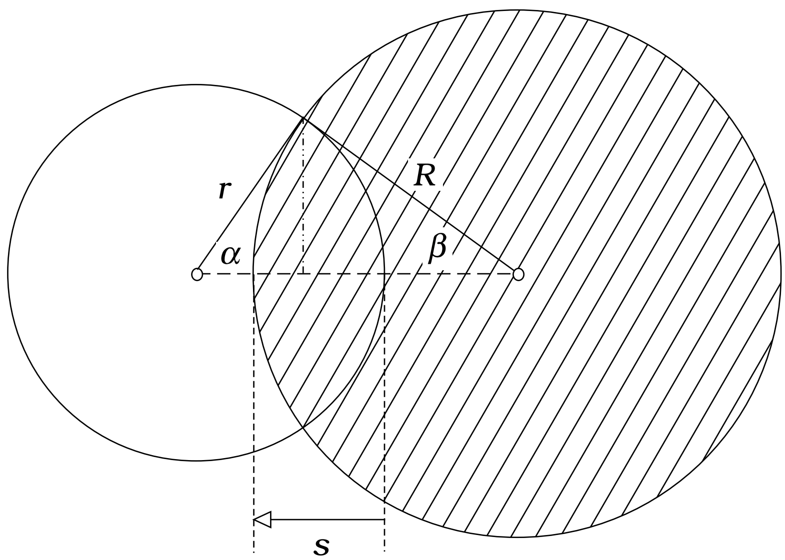
kann man den überdeckten Kreisabschnitt

$$A_{ü} = \frac{\pi r^2}{2\pi} 2\alpha - 2\frac{r\cos(\alpha)\, r\sin(\alpha)}{2} = r^2\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)$$

als Funktion von s berechnen und erhält die freie Öffnung

$$\boxed{A_f(s) = \pi r^2\left(1 - \frac{\alpha(s)}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha(s))}{2\pi}\right)}$$





Aus der geometrische Bedingung

$$r \sin(\alpha) = R \sin(\beta) \qquad \boxed{\beta(\alpha) = \arcsin(\frac{r}{R} \sin(\alpha))}$$

folgt

$$\boxed{s(\alpha) = r\left(1 - \cos(\alpha)\right) + R\left(1 - \cos(\beta(\alpha))\right)}$$

Die überdeckte Fläche besteht aus zwei Kreisabschnitten:

$$A_{ü} = r^2\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right) + R^2\left(\beta - \frac{1}{2}\sin(2\beta)\right)$$

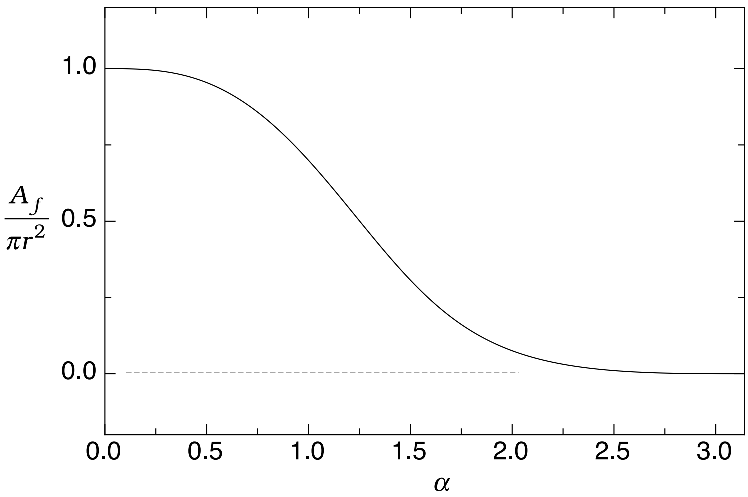
Die freie Querschnittsöffnung:

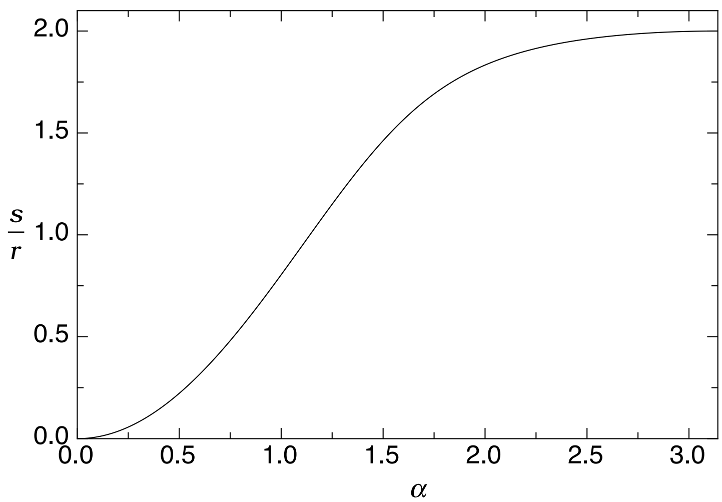
$$A_f = \pi r^2 - r^2\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right) - R^2\left(\beta - \frac{1}{2}\sin(2\beta)\right)$$

$$\boxed{A_f(\alpha) = \pi r^2\left(1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\sin(2\alpha) - \frac{R^2}{r^2}\left(\frac{\beta(\alpha)}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\sin(2\beta(\alpha))\right)\right)}$$

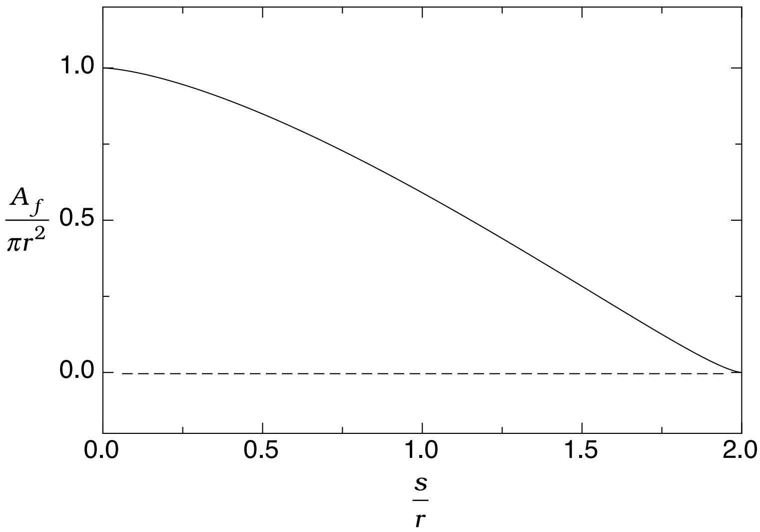
$$\beta = \arcsin\left(\frac{r}{R}\sin(\alpha)\right), \qquad 0 \le \alpha \le \pi$$

In der folgenden Auswertung wurde $R = 1{,}2 \cdot r$ gewählt.



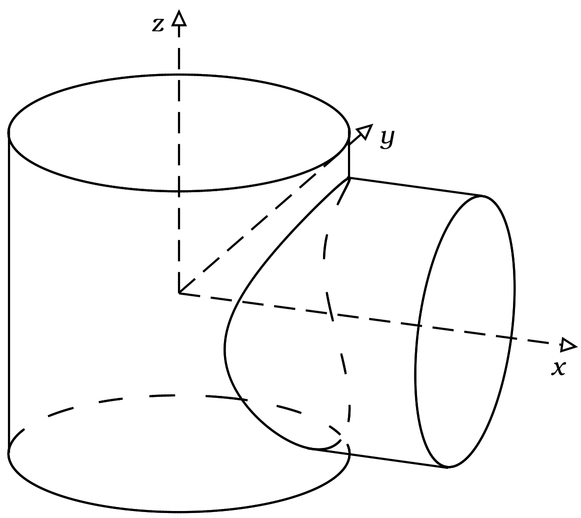


Wenn man die Werte von α, $s(\alpha)$ und $A_f(\alpha)$ in einer dreispaltigen Tabelle anordnet, kann man die Werte der dritten Spalte in Abhängigkeit von den Werten der zweiten Spalte graphisch darstellen und erhält den Graphen der Funktion $A_f(s)$.



Berechnet werden sollen die Ortsvektoren der Schnittkurve zwischen zwei Kreiszylindern mit unterschiedlichem Radius und unterschiedlicher Achsenneigung.

1. Orthogonale Zylinderachsen:



$\boxed{R = 5, \quad r = 4}$

Die Ortsvektoren zu den Schnittpunkten P auf dem Kreiszylinder mit dem kleinen Radius r parallel zur x-Achse lauten:

$$\overrightarrow{OP_k} = \begin{bmatrix} x(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{bmatrix} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \, ,$$

und die Ortsvektoren zu den Schnittpunkten P auf dem Kreiszylinder mit dem großen Radius R parallel zur z-Achse:

$$\overrightarrow{OP_g} = \begin{bmatrix} R\cos(\psi) \\ R\sin(\psi) \\ z(\psi) \end{bmatrix} \qquad 0 \le \psi \le 2\pi$$

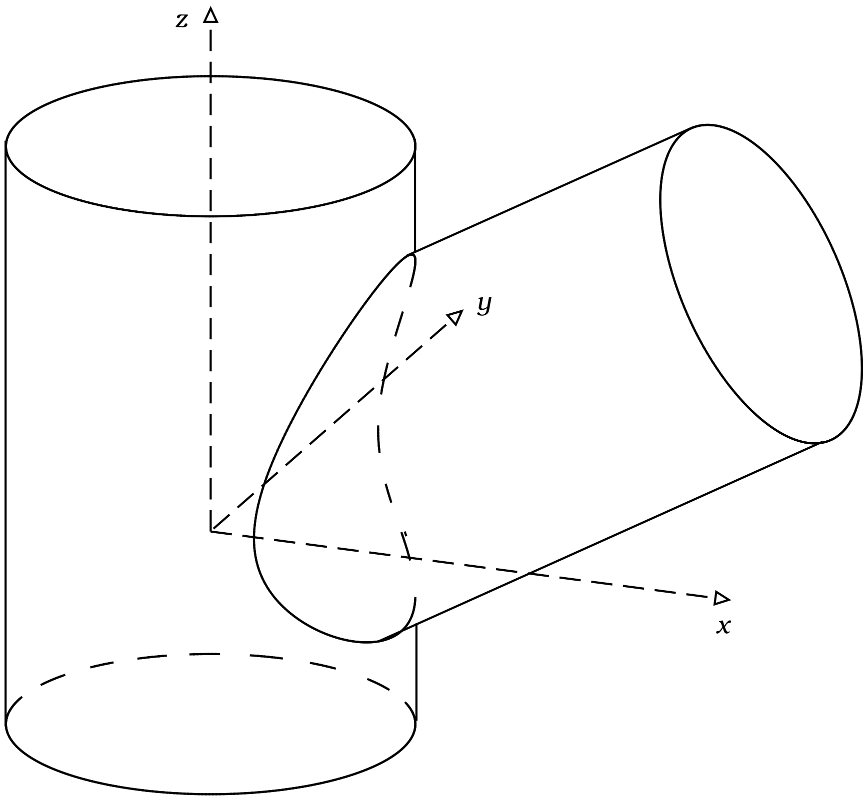
Daraus folgt:

$$\begin{bmatrix} x(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cos(\psi) \\ R\sin(\psi) \\ z(\psi) \end{bmatrix}$$

$$r\cos(\varphi) = R\sin(\psi) \qquad \psi(\varphi) = \arcsin\left(\frac{r}{R}\cos(\varphi)\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} R\cos(\psi(\varphi)) \\ r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{bmatrix} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi}$$

2. Nichtorthogonale Zylinderachsen:



$$\boxed{R = 6, \quad r = 5, \quad \alpha = 30^\circ}$$

Ist die Achse des Kreiszylinders mit dem kleinen Radius r in der xz-Ebene um den Winkel α gegen die x-Achse geneigt, so gilt mit den Richtungsvektoren

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \cos(\alpha)\,\vec{e}_x + \sin(\alpha)\,\vec{e}_y\\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_y\\ \vec{e}_3 &= -\sin(\alpha)\,\vec{e}_x + \cos(\alpha)\,\vec{e}_y\end{aligned}$$

für Punkte P auf der Schnittkurve des geneigten Kreiszylinders

$$\overrightarrow{OP_k} = s(\varphi)\,\vec{e}_1 + r\cos(\varphi)\,\vec{e}_2 + r\sin(\varphi)\,\vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{OP_k} = s(\varphi)\begin{bmatrix}\cos(\alpha)\\ 0\\ \sin(\alpha)\end{bmatrix} + r\cos(\varphi)\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + r\sin(\varphi)\begin{bmatrix}-\sin(\alpha)\\ 0\\ \cos(\alpha)\end{bmatrix}$$

und auf dem Kreiszylinder um die z-Achse

$$\overrightarrow{OP_g} = R\cos(\psi)\,\vec{e}_x + R\sin(\psi)\,\vec{e}_y + z(\psi)\,\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{OP_g} = \begin{bmatrix} R\cos(\psi) \\ R\sin(\psi) \\ z(\psi) \end{bmatrix}$$

Da die beiden Ortsvektoren übereinstimmen müssen, gilt

$$\begin{aligned} s(\varphi)\cos(\alpha) - r\sin(\varphi)\sin(\alpha) &= R\cos(\psi) \\ r\cos(\varphi) &= R\sin(\psi) \\ s(\varphi)\sin(\alpha) + r\sin(\varphi)\cos(\alpha) &= z(\psi) \end{aligned}$$

und daraus folgt für die Koordinaten der Punkte auf der Schnittkurve:

$$\psi = \arcsin\left(\frac{r}{R}\cos(\varphi)\right) \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$s(\varphi) = \frac{R\cos(\psi(\varphi)) + r\sin(\varphi)\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(\varphi) &= R\cos(\psi(\varphi)) \\ y(\varphi) &= r\cos(\varphi) \\ z(\varphi) &= s(\varphi)\sin(\alpha) + r\sin(\varphi)\cos(\alpha) \end{aligned}} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

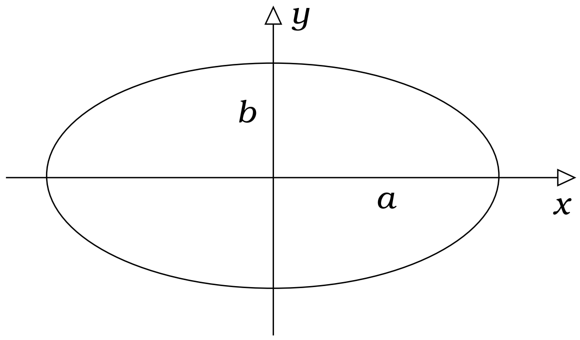
Der Kreis auf dem geneigten Zylinder im Abstand a längs der Zylinderachse von der z-Achse hat die Ortsvektoren

$$\overrightarrow{OP}_{Kreis} = a\,\vec{e}_1 + r\cos(\varphi)\,\vec{e}_2 + r\sin(\varphi)\,\vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{OP}_{Kreis} = a\begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} + r\cos(\varphi)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r\sin(\varphi)\begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen a und $b < a$ auf den Koordinatenachsen in der xy-Ebene lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Die von den Kurven

$$y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

umschlossene Fläche A ist wegen der symmetrischen Lage im Koordinatensystem

$$A = 4\cdot\left(\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx\right).$$

Mit der Substitution

$$x = a\sin(\alpha) \qquad dx = \frac{d}{d\alpha}\big(a\sin(\alpha)\big)\,d\alpha = a\cos(\alpha)\,d\alpha$$

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\rightarrow \quad \alpha = 0 \\ x = a \quad &\rightarrow \quad \alpha = \pi/2 \end{aligned}$$

wird

$$A = 4ab\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\big(\sin(\alpha)\big)^2}\,\cos(\alpha)\,d\alpha$$

$$A = 4ab\int_0^{\pi/2}\big(\cos(\alpha)\big)^2\,d\alpha$$

Den Integranden kann man mit Hilfe des Additionstheorems

$$\cos(2\alpha) = \big(\cos(\alpha)\big)^2 - \big(\sin(\alpha)\big)^2 = 2\big(\cos(\alpha)\big)^2 - 1$$

$$\big(\cos(\alpha)\big)^2 = \frac{1}{2}\big(1+\cos(2\alpha)\big)$$

vereinfachen und erhält

$$A = 2ab\int_0^{\pi/2}\big(1+\cos(2\alpha)\big)\,d\alpha = 2ab\left(\alpha+\frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2}$$

$$\boxed{A = \pi ab}$$

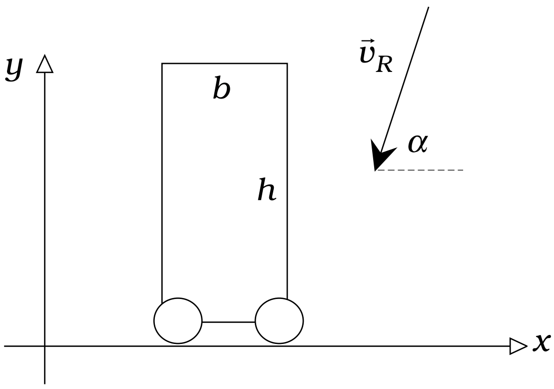
Für $a = b = r$ erhält man die Fläche eines Kreises mit dem Radius r.

✎ ______________________________

Ein quaderförmiger Körper bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_K = v_K \vec{e}_x$ durch ein Gebiet, in dem Regen der Massendichte ρ mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v}_R = -v_R \cos(\alpha)\,\vec{e}_x - v_R \sin(\alpha)\,\vec{e}_y$$

fällt.



Man berechne die Regenmasse dm, die in der Zeit dt auf die Oberfläche des bewegten Körpers trifft, der senkrecht zur xy-Ebene die Kantenlänge L hat.

In der Kinematik der Relativbewegung ist $\vec{v}_R$ die absolute Geschwindigkeit $\vec{v}_{abs}$ und $\vec{v}_K$ die Führungsgeschwindigkeit $\vec{v}_F$ des bewegten Beobachters, und weil

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_F + \vec{v}_{rel}$$

gilt, ist

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{abs} - \vec{v}_F$$

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_R - \vec{v}_K = \begin{bmatrix} -v_R \cos(\alpha) \\ -v_R \sin(\alpha) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_K \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} v_K + v_R \cos(\alpha) \\ v_R \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

Die vom Regen angeströmtem Flächen hL vorn und bL oben haben die *in den Körper* weisenden Normaleneinheitsvektoren

$$\vec{n}_h = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{n}_b = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wird eine Flächenelement dA mit dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ von einem Fluid der Massendichte ρ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ durchströmt, so bewegt sich in der Zeit dt die Masse

$$dm = \rho\left(\vec{v} \circ \vec{n}\right) dA\, dt$$

durch das Flächenelement. Daraus folgt für die in der Zeit dt auf den im Regen bewegten Körper fallende Masse

$$dm = \rho\left(\vec{v}_{rel} \circ \vec{n}_h\right) hL\, dt + \rho\left(\vec{v}_{rel} \circ \vec{n}_b\right) bL\, dt$$

$$\boxed{dm = \rho L\Big(\big(v_K + v_R \cos(\alpha)\big) h + v_R \sin(\alpha)\, b\Big) dt} .$$

Mit

$$\gamma := \frac{v_K}{v_R} \qquad v_K = \gamma v_R\,, \qquad \beta := \frac{b}{h} \qquad b = \beta h$$

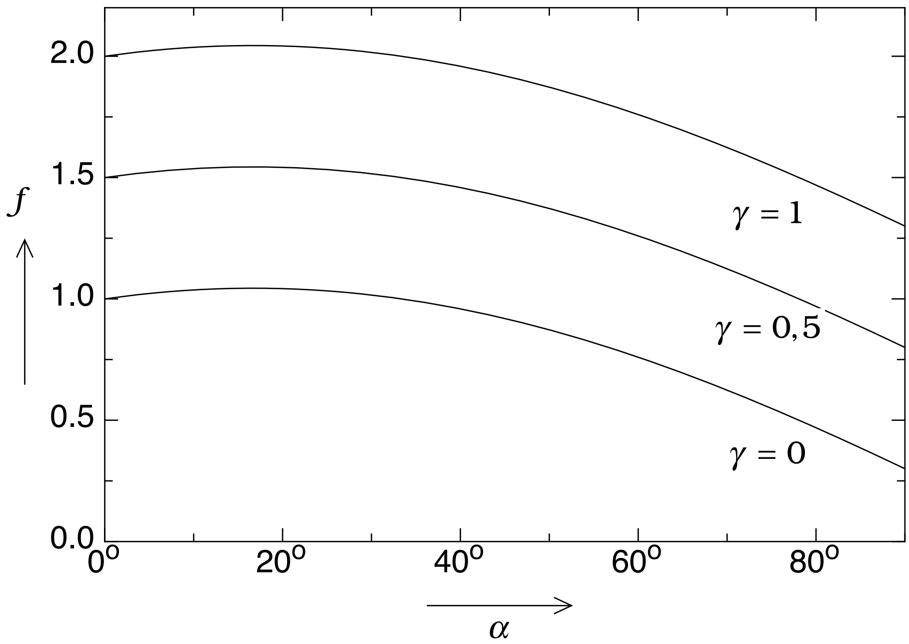
und der Funktion

$$f(\gamma, \alpha, \beta) := \gamma + \cos(\alpha) + \beta \sin(\alpha)$$

wird

$$dm = \rho L h v_R\, f(\gamma, \alpha, \beta)\, dt\,.$$

Für den speziellen Wert $\beta = 0,3$ und verschiedene Werte von γ kann man die Funktion $f(\gamma, \alpha, \beta = 0,3)$ graphisch darstellen.



Ihre Extremwerte erhält man aus der Bedingung

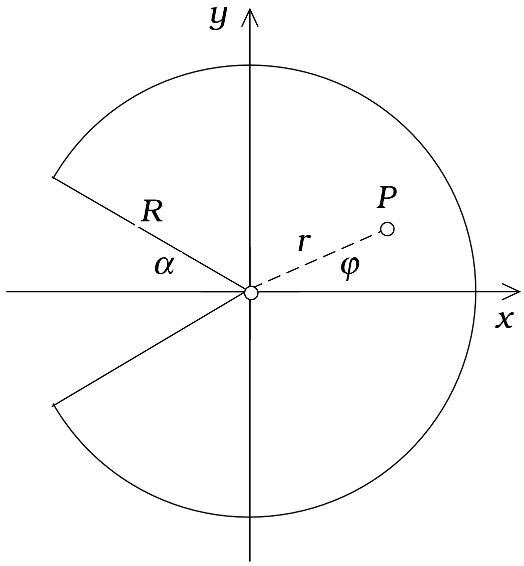
$$\frac{d\, f(\gamma, \alpha, \beta = 0,3)}{d\alpha} = -\sin(\alpha) + 0,3\cos(\alpha) = 0$$

$$\tan(\alpha) = 0,3 \qquad \rightarrow \qquad \alpha = 16,7°$$

Wenn der Regen also unter einem Winkel von $\alpha = 16,7°$ einfällt, ist die Benetzung des Körpers bei jedem Geschwindigkeitsverhältnis maximal.

✎ ______________________________

Bei der Berechnung von Flächeninhalten und Schwerpunktskoordinaten in Flächen, die von Kreisbögen berandet sind, sind Polarkoordinaten den kartesischen Koordinaten überlegen.



Der Punkt P mit den Polarkoordinaten r und φ ist Eckpunkt des infinitesimalen Flächenelementes dA mit der Kantenlänge dr in radialer Richtung und der Bogenlänge $r\,d\varphi$ auf dem Kreis mit dem Radius r. Das Flächenelement hat den Flächeninhalt

$$dA = r d\varphi dr \,.$$

Die Fläche des obigen Kreissektors liefert das Integral

$$A = \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} \left(\int_0^R r\,dr \right) d\varphi$$

$$A = \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} \left(\frac{1}{2} R^2 \right) d\varphi = \frac{1}{2} R^2 \left((\pi-\alpha) - (-\pi+\alpha) \right)$$

$$\boxed{A = R^2 (\pi - \alpha)}$$

Der Flächenschwerpunkt des Kreissektors liegt auf der Symmetrieachse des Kreissektors, also auf der x-Achse, seine Koordinate x_S ist definiert durch

$$x_S := \frac{1}{A} \int_A x\,dA$$

wobei das formal geschriebene Flächenintegral mit

$$x = r\cos(\varphi)$$

in die auswertbare Form gebracht wird:

$$\int_A x\,dA = \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} \left(\int_0^R r\cos(\varphi)\, r\,dr \right) d\varphi = \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} \left(\frac{1}{3} R^3 \cos(\varphi) \right) d\varphi$$

$$\int_A x\,dA = \frac{1}{3} R^3 \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} \cos(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{3} R^3 \left(\sin(\pi-\alpha) - \sin(-\pi+\alpha) \right)$$

$$\int_A x\,dA = \frac{2}{3} R^3 \sin(\pi-\alpha) = \frac{2}{3} R^3 \sin(\pi-\alpha) = \frac{2}{3} R^3 \sin(\alpha)$$

Damit wird

$$x_S = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin(\alpha)}{R^2 (\pi-\alpha)}$$

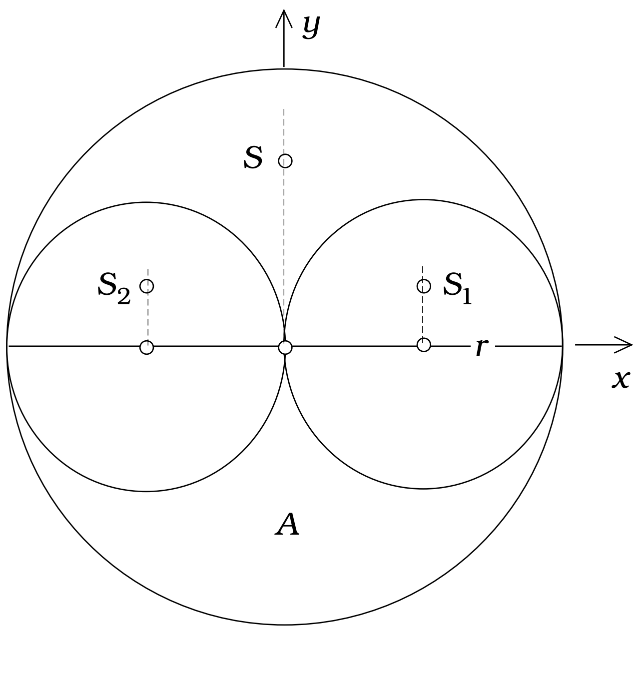
und der Schwerpunkt des **Kreissektor**s hat die Koordinaten

$$\boxed{x_S = \frac{2}{3} R \frac{\sin(\alpha)}{(\pi-\alpha)}, \qquad y_S = 0}$$

Bei einem **Halbkreis** ist $\alpha = \pi/2$ und

$$\boxed{x_S = \frac{4}{3\pi} R, \qquad y_S = 0}$$

Wenn man aus einem Kreis mit dem Radius $2r$ zwei Kreise mit dem Radius r herausschneidet, entstehen zwei Flächen, die jeweils so groß sind wie ein herausgeschnittener Kreis:



Der große Kreis hat die Fläche

$$A_{gK} = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2$$

und ein kleiner Kreis die Fläche

$$A_{kK} = \pi r^2 .$$

Dann gilt

$$2A + 2A_{kK} = A_{gK}$$

$$2A + 2\pi r^2 = 4\pi r^2$$

$$\boxed{A = \pi r^2 = A_{kK}}$$

Für die Flächen und Schwerpunkte der oberen kleinen Halbkreise und des großen Halbkreises gilt

$$\begin{array}{lll} x_{S_{k1}} = r & x_{S_{k2}} = -r & x_{S_g} = 0 \\ y_{S_{k1}} = \dfrac{4}{3\pi} r & y_{S_{k2}} = \dfrac{4}{3\pi} r & y_{S_g} = \dfrac{8}{3\pi} r \\ A_{k1} = \dfrac{\pi}{2} r^2 & A_{k2} = \dfrac{\pi}{2} r^2 & A_g = 2\pi r^2 \end{array}$$

Wenn man aus dem großen oberen Halbkreis die beiden kleinen Halbkreise herausschneidet, bleibt eine zur y-Achse symmetrische Figur übrig. Die y-Koordinate des Schwerpunktes dieser von Halbkreisbögen begrenzten Fläche kann man berechnen, indem man die herausgeschnittenen Flächen mit einem negativen Vorzeichen versieht.

Allgemein gilt für die Schwerpunktkoordinate y_S einer Fläche, die sich aus drei Flächen mit bekannten Schwerpunktskoordinaten zusammensetzt

$$y_S = \frac{1}{A}\int_A y dA = \frac{1}{A}\left(\int_{A_1} y dA + \int_{A_2} y dA + \int_{A_3} y dA\right) = \frac{1}{A}\left(y_{S_1} A_1 + y_{S_2} A_2 + y_{S_3} A_3\right)$$

$$y_S = \frac{A_1 y_{S_1} + A_2 y_{S_2} + A_3 y_{S_3}}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Nun wird

$$A_1 = A_g, \quad A_2 = -A_{k1}, \quad A_3 = -A_{k2}$$

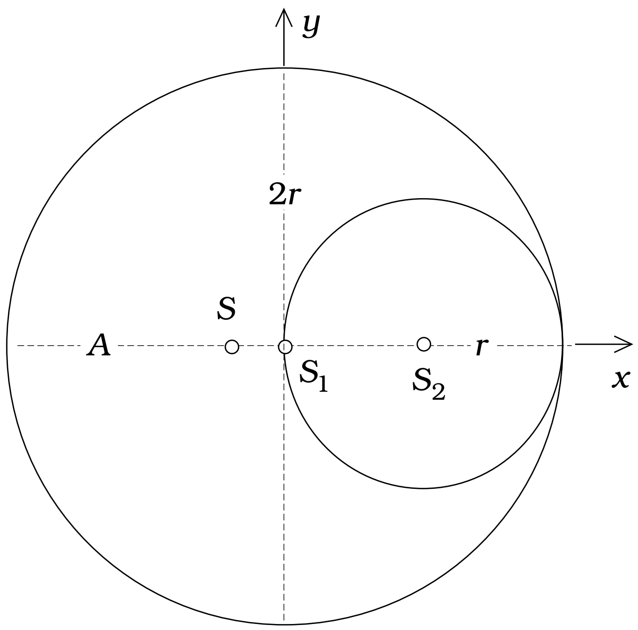
$$A = A_g + (-A_{k1}) + (-A_{k2}) = 2\pi r^2 + \left(-\frac{\pi}{2} r^2\right) + \left(-\frac{\pi}{2} r^2\right) = \pi r^2$$

$$y_S = \frac{1}{\pi r^2}\left\{2\pi r^2 \cdot \frac{8}{3\pi} r + \left(-\frac{\pi}{2} r^2\right)\frac{4}{3\pi} r + \left(-\frac{\pi}{2} r^2\right)\frac{4}{3\pi} r\right\}$$

und der Schwerpunkt S der Restfläche hat die Koordinaten

$$\boxed{x_S = 0, \qquad y_S = \frac{4}{\pi} r}$$

Wird aus dem großen Kreis nur der rechte Kreis herausgeschnitten,



so liegt die Restfläche

$$A = A_1 + A_2 = \pi (2r)^2 + \left(-\pi r^2\right) = 3\pi r^2$$

symmetrisch zur x-Achse und deshalb wird $y_S = 0$. Für die x-Koordinate gilt

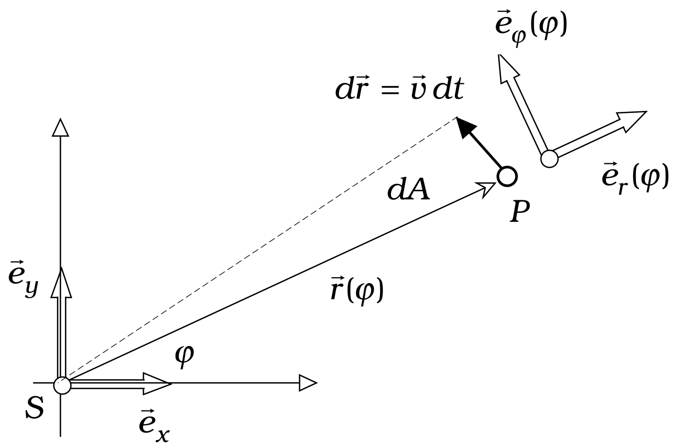
$$x_S = \frac{A_1 x_{S_1} + A_2 x_{S_2}}{A_1 + A_2} = \frac{\pi (2r)^2 \cdot 0 + \left(-\pi r^2\right) \cdot r}{\pi (2r)^2 + \left(-\pi r^2\right)} = \frac{-\pi r^3}{3\pi r^2}$$

$$\boxed{x_S = -\frac{1}{3} r}$$

✎ ______________________________

Im folgenden Beispiel werden die drei KEPLERschen Gesetze der Planetenbewegung aus dem NEWTONschen Grundgesetz hergeleitet.

Weil die Masse der Sonne sehr viel größer ist als die Masse eines ihrer Planeten, nimmt man den Mittelpunkt S der Sonne als ruhend an.



Der Ortsvektor vom Schwerpunkt S der Sonne zum Planetenschwerpunkt P lautet in Polarkoordinaten:

$$\overrightarrow{SP}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(\varphi(t))\,.$$

Für die Vektorbasis der Polarkoordinaten gilt

$$\begin{aligned}\vec{e}_r(\varphi) &= \cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\varphi)\,\vec{e}_y\\ \vec{e}_\varphi(\varphi) &= -\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \cos(\varphi)\,\vec{e}_y\end{aligned} \qquad \frac{d\,\vec{e}_r}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi, \quad \frac{d\,\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_r$$

Damit erhalten wir den Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\big(r(t)\vec{e}_r(\varphi(t))\big) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

und den Beschleunigungsvektor

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\,\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\,\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

des Planetenschwerpunktes in Polarkoordinaten.

Die NEWTONsche Bewegungsgleichung des Planeten infolge der Gravitationswechselwirkung zwischen Sonne und Planet lautet nach dem NEWTONschen Gravitationsgesetz:

$$m_P\vec{a} = -\gamma \frac{m_P m_S}{r^2}\vec{e}_r \,,$$

$$\boxed{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\,\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\,\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi = -\gamma \frac{m_S}{r^2}\vec{e}_r}$$

Dabei ist

$$\boxed{\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Meter}^3}{\text{Kilogramm} \cdot \text{Sekunde}^2}}$$

die **Gravitationskonstante**.

Aus der vektoriellen Bewegungsgleichung ergeben sich die beiden Differentialgleichungen für die Schwerpunktkoordinaten r und φ des Planeten

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\gamma \frac{m_S}{r^2}$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

Aus der zweiten Differentialgleichung folgt

$$\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)r = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{r^2\dot{\varphi} = C}$$

Für die im infinitesimalen Zeitintervall dt vom Ortsvektor $\vec{r}$ überstrichene Fläche dA gilt

$$dA = \frac{1}{2}\left|\,\vec{r} \times \vec{v}\,dt\,\right| = \frac{1}{2}\left|\,r\,\vec{e}_r \times \left(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right)\,\right|dt = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}\,dt$$

und aus der Komponente der Bewegungsgleichung in $\vec{e}_\varphi$ -Richtung ergibt sich damit das **2. KEPLERsche Gesetz**:

$$\boxed{dA = \frac{C}{2}dt}$$

Der von der Sonne ausgehende Ortsvektor des Planetenschwerpunktes überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen („Flächensatz“).

Die Komponente der Bewegungsgleichung des Planetenschwerpunktes in $\vec{e}_r$ -Richtung kann nun geschrieben werden:

$$\ddot{r} - r\left(\frac{C^2}{r^4}\right) = -\gamma \frac{m_S}{r^2} \qquad \rightarrow \qquad \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = -\gamma \frac{m_S}{r^2}$$

Mit der Darstellung $r = r(\varphi(t))$ wird

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = r'(\varphi)\,\dot{\varphi} \qquad\qquad \ddot{r} = r''(\varphi)\,\dot{\varphi}^2 + r'(\varphi)\ddot{\varphi}$$

und aus der Komponente der Bewegungsgleichung des Planetenschwerpunktes in $\vec{e}_\varphi$-Richtung

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi}$$

folgt

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2}{r}r'\dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{r} = r''\dot{\varphi}^2 + r'\ddot{\varphi} = r''\dot{\varphi}^2 - r'\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} = r''\dot{\varphi}^2 - r'\frac{2}{r}r'\dot{\varphi}^2 = \left(r'' - 2\frac{(r')^2}{r}\right)\dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{r} = \left(r'' - 2\frac{(r')^2}{r}\right)\frac{C^2}{r^4}$$

Die ursprüngliche Differentialgleichung

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = -\gamma\frac{m_S}{r^2}$$

kann nun geschrieben werden

$$\left(r'' - 2\frac{(r')^2}{r}\right)\frac{C^2}{r^4} - \frac{C^2}{r^3} = -\gamma\frac{m_S}{r^2}$$

$$\left(r'' - 2\frac{(r')^2}{r}\right)\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} = -\gamma\frac{m_S}{C^2} \qquad\qquad \frac{r''}{r^2} - \frac{2}{r^3}(r')^2 - \frac{1}{r} = -\gamma\frac{m_S}{C^2}$$

Die Funktion

$$f(\varphi) := \frac{1}{r(\varphi)}$$

hat die Ableitungen

$$f'(\varphi) = -\frac{1}{r^2}r', \qquad f''(\varphi) = \frac{2}{r^3}(r')^2 - \frac{1}{r^2}r''$$

und damit wird aus der kompliziert aussehenden Differentialgleichung für $r(\varphi)$ die harmlose Differentialgleichung für $f(\varphi)$

$$f''(\varphi) + f(\varphi) = \gamma \frac{m_S}{C^2}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$f(\varphi) = \gamma \frac{m_S}{C^2} + C_1 \cos(\varphi) + C_2 \sin(\varphi)$$

also

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{1}{\gamma \frac{m_S}{C^2} + C_1 \cos(\varphi) + C_2 \sin(\varphi)}}$$

Die Konstanten C, C_1 und C_2 stehen für die Anpassung an spezielle Anfangsbedingungen zur Verfügung.

In der Position $\varphi = 0$ habe der Planetenschwerpunkt den *kleinsten* Abstand r_0 vom Sonnenmittelpunkt und seine Geschwindigkeit sei dann v_0. Für $\varphi = 0$ ist dann $r'(0) = 0$.

$$\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad r = r_0, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_0}{r_0}, \quad C = r_0 v_0$$

$$\frac{1}{r_0} = \gamma \frac{m_S}{C^2} + C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{r_0} - \gamma \frac{m_S}{(r_0 v_0)^2}$$

$$\frac{d\,f(\varphi)}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r(\varphi)}\right) = -\frac{r'(\varphi)}{\left(r(\varphi)\right)^2} = -C_1 \sin(\varphi) + C_2 \cos(\varphi)$$

$$\left(\frac{d\,f(\varphi)}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = -\left(\frac{r'(\varphi)}{\left(r(\varphi)\right)^2}\right)_{\varphi=0} = \frac{0}{r_0^{\ 2}} = C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\frac{1}{r(\varphi)} = \gamma \frac{m_S}{\left(r_0 v_0\right)^2} + \left(\frac{1}{r_0} - \gamma \frac{m_S}{\left(r_0 v_0\right)^2}\right) \cos(\varphi)$$

$$r(\varphi) = \frac{1}{\gamma \frac{m_S}{\left(r_0 v_0\right)^2} + \left(\frac{1}{r_0} - \gamma \frac{m_S}{\left(r_0 v_0\right)^2}\right) \cos(\varphi)}$$

Mit den Abkürzungen

$$K_1 := \gamma \frac{m_S}{\left(r_0 v_0\right)^2}, \qquad K_2 := \frac{1}{r_0} - K_1$$

wird

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{1}{K_1 + K_2 \cos(\varphi)}}$$

Das ist die Gleichung einer Ellipse mit einem Brennpunkt im Schwerpunkt der Sonne.

Für eine Ellipse mit den Hauptachsen a und $b < a$ lautet die Ellipsengleichung in den auf einen Brennpunkt bezogenen Polarkoordinaten:

$$r(\varphi) = \frac{1}{\dfrac{a}{b^2} + \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \cos(\varphi)}$$

Es lässt sich also setzen:

$$\frac{a}{b^2} = K_1, \qquad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} = \sqrt{K_1{}^2 - \frac{1}{b^2}} = K_2$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{K_1{}^2 - K_2{}^2}}, \qquad a = \frac{K_1}{K_1{}^2 - K_2{}^2}$$

Damit ist das **1. KEPLERsche Gesetz** abgeleitet:

Der Schwerpunkt des Planeten bewegt sich auf einer Ellipsenbahn, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Zahlenbeispiel (Erde):

Sonnenmasse: $m_S = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ Kilogramm

Kürzester Abstand des Planeten von der Sonne: $r_0 = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ Meter

Planetengeschwindigkeit im kürzesten Abstand: $v_0 = 3 \cdot 10^4 \dfrac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$

Damit erhalten wir

$$K_1 = 6{,}586 \cdot 10^{-12}\ \text{Meter}^{-1} \qquad K_2 = 9{,}799 \cdot 10^{-14}\ \text{Meter}^{-1}$$

und die Bahnhalbachsen

$$a = 1{,}51859 \cdot 10^{11}\,\text{Meter}, \qquad b = 1{,}51842 \cdot 10^{11}\,\text{Meter}\,.$$

Aus dem oben abgeleiteten „Flächensatz“

$$dA = \frac{C}{2}\,dt$$

folgt für einen Umlauf des Planeten

$$A = \frac{C}{2}T$$

wobei T die Umlaufzeit und

$$A = \pi ab$$

der Flächeninhalt der Bahnellipse ist; also gilt

$$T = 2\pi \frac{ab}{C}\,.$$

Mit der oben definierten Bedeutung von C

$$C = r_0 v_0$$

wird

$$K_1 = \gamma \frac{m_S}{C^2}$$

und

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{a^2b^2}{C^2} = 4\pi^2 \frac{a^3}{C^2}\frac{b^2}{a} = 4\pi^2 \frac{a^3}{C^2}\frac{1}{K_1} = 4\pi^2 \frac{a^3}{C^2}\frac{C^2}{\gamma m_S} = \frac{4\pi^2}{\gamma m_S}a^3$$

Also gilt

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma m_S} = const$$

Das ist das **3. KEPLERsche Gesetz**:

$$\boxed{\frac{\left(T_{P1}\right)^2}{\left(T_{P2}\right)^2} = \frac{\left(a_{P1}\right)^3}{\left(a_{P2}\right)^3}}$$

Das Verhältnis der Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten ist gleich dem Verhältnis der dritten Potenz ihrer großen Bahnhalbachsen.

✎ ___