Physikalische Anwendungen – Dynamik

Zum Mathematik-Lehrbuch „Notwendig und zunächst hinreichend“ (Shaker Verlag, Aachen) gibt es mehrere PDF-Dokumente mit ergänzenden Beispielen und Aufgaben, die die Anwendung der mathematischen Grundlagen in ingenieurrelevanten Bereichen zeigen.

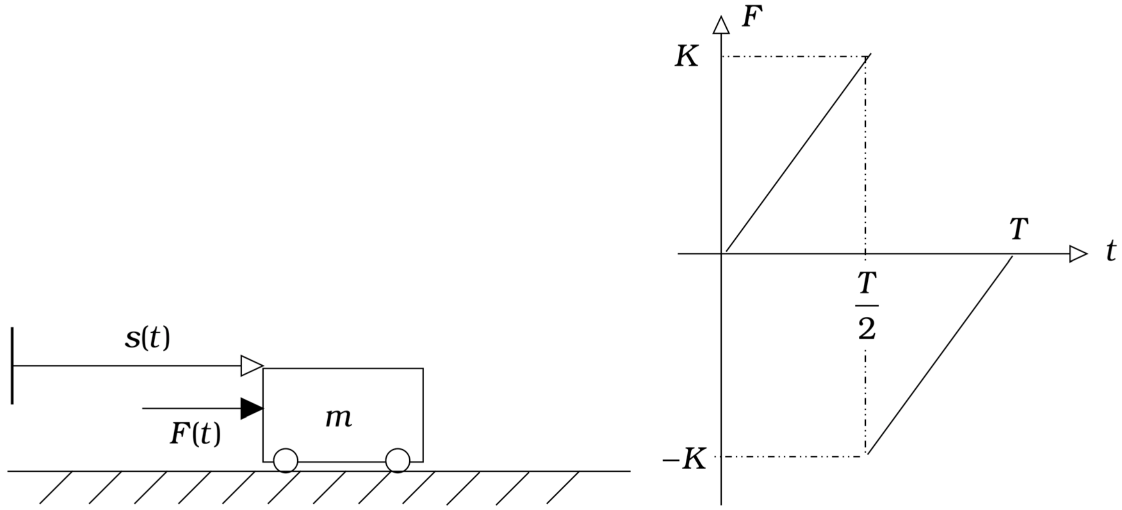
Im vorliegenden Dokument finden Sie eine Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus dem Bereich der Dynamik:

Lineare Bewegung – Kräfte- und Momentensumme, Dyname – Massenträgheitsmoment – Schwerpunktsatz, Momentensatz – Impuls- und Drehimpulsvektor – Kinetische Energie, potentielle Energie und Leistung – Energiesatz, Arbeit – Ebene Bewegungen – Fallbewegung mit Luftreibung – Kinematische Zwangsbedingungen und Reaktionskräfte – Linearisierung von Bewegungsgleichungen – Schwingungen – Feder-Masse-Systeme – Haft- und Gleitreibung – Rollen – Körperverbände

© 2010 S. Kessel, D. Fröhling

v1.0

Wenn ein Fahrzeug der Masse m mit einer zeitabhängigen Kraft $F(t)$ aus dem Stand heraus angeschoben wird



und die Position des Fahrzeugs mit dem Weg-Zeit-Gesetz $s(t)$ beschrieben wird, dann gilt das NEWTONsche Grundgesetz

$$m\,\ddot{s}(t) = F(t)\,.$$

Die noch unbekannte Funktion $s(t)$ muss diese Differentialgleichung und die vorgegebenen Anfangsbedingungen

$$s(0) = 0 \qquad \dot{s}(0) = 0$$

erfüllen.

Das graphisch beschriebene Kraftgesetz lautet

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{2K}{T}t & 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \\ \dfrac{2K}{T}(t-T) & \dfrac{T}{2} < t \le T \end{cases}$$

Mit der Konstanten

$$b := \frac{2K}{mT}$$

lauten die Differentialgleichungen für $s(t)$ in den beiden Bewegungsabschnitten

$$\ddot{s}(t) = \begin{cases} bt & 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \\ b(t-T) & \dfrac{T}{2} < t \le T \end{cases}$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit $\dot{s}(t)$

$$\dot{s}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}bt^2 + C_1 & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ \frac{1}{2}b(t-T)^2 + C_2 & \frac{T}{2} < t \le T \end{cases}$$

Die Anfangsbedingung $\dot{s}(0) = 0$ wird erfüllt, wenn

$$C_1 = 0$$

ist. Zum Zeitpunkt $t = T/2$ soll die Geschwindigkeit stetig sein, also muss

$$\frac{1}{2}b\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}b\left(T - \frac{T}{2}\right)^2 + C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

sein. Somit gilt

$$\dot{s}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}bt^2 & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ \frac{1}{2}b(t-T)^2 & \frac{T}{2} < t \le T \end{cases} \qquad s(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}bt^3 + C_3 & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ \frac{1}{6}b(t-T)^3 + C_4 & \frac{T}{2} < t \le T \end{cases}$$

Die Anfangsbedingung $s(0) = 0$ wird erfüllt, wenn

$$C_3 = 0$$

ist. Daraus folgt

$$s\left(t = \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{6}b\left(\frac{T}{2}\right)^3 = \frac{1}{48}bT^3$$

und weil $s(t)$ zum Zeitpunkt $t = T/2$ stetig sein muss, gilt

$$\frac{1}{6}b\left(\frac{T}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}b\left(\frac{T}{2} - T\right)^3 + C_4 \quad \rightarrow \quad C_4 = \frac{1}{3}b\left(\frac{T}{2}\right)^3 = \frac{1}{24}bT^3$$

$$\boxed{s(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}bt^3 & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ \frac{1}{6}b(t-T)^3 + \frac{1}{24}bT^3 & \frac{T}{2} < t \le T \end{cases}}$$

$$s(t = T) = \frac{1}{24}bT^3 = 2 \cdot s\left(t = \frac{T}{2}\right),$$

$$\dot{s}(t = T) = 0\,.$$

Wenn die bis zum Zeitpunkt $t = T$ vom Fahrzeug zurückgelegte Strecke die Länge

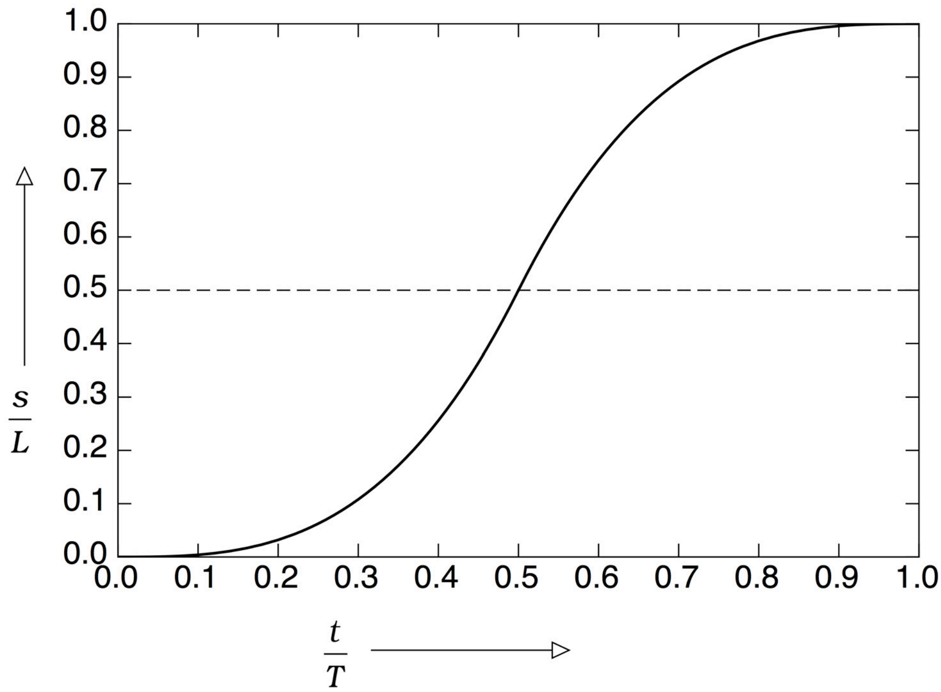
L haben soll,

$$\frac{1}{24}bT^3 = L \quad \rightarrow \quad \frac{2K}{mT} = 24\frac{L}{T^3}$$

muss der Maximalwert der Antriebskraft

$$\boxed{K = 12\frac{mL}{T^2}}$$

sein.

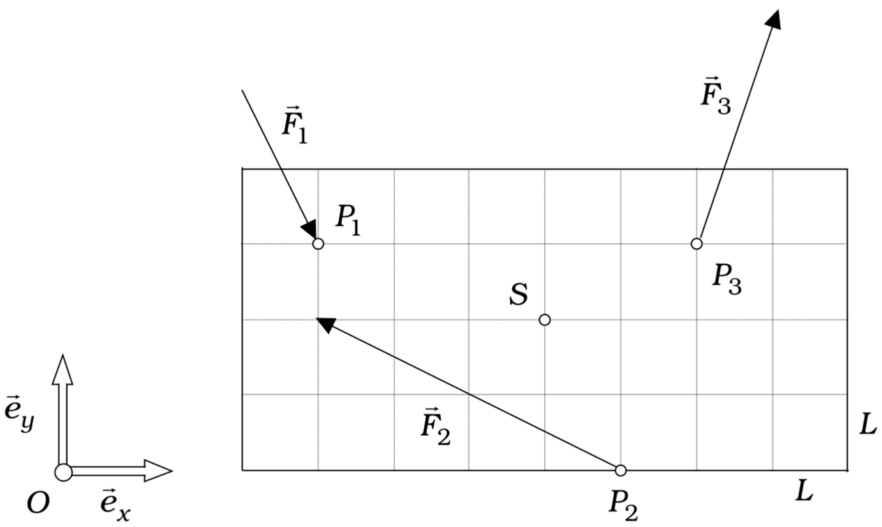


Die Kraft $F(t)$ hat das Fahrzeug aus dem Stand in der Zeit T um die Stecke L verschoben und abgestellt.

✎ ———————————————

Bei einer starren rechteckigen Scheibe mit homogener Massenverteilung liegt der Schwerpunkt S im Schnittpunkt der Flächendiagonalen. Wirken in den Punkten P_1, P_2 und P_3 die Kräfte

$$\vec{F}_1 = F_0\vec{e}_x - 2F_0\vec{e}_y$$
$$\vec{F}_2 = -4F_0\vec{e}_x + 2F_0\vec{e}_y$$
$$\vec{F}_3 = F_0\vec{e}_x + 3F_0\vec{e}_y$$



so haben sie bezogen auf den Schwerpunkt eine Drehwirkung auf den starren Körper, die durch die auf S bezogene **Momentensumme**

$$\vec{M}_S = \overrightarrow{SP_1} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{SP_2} \times \vec{F}_2 + \overrightarrow{SP_3} \times \vec{F}_3$$

$$\vec{M}_S = \begin{bmatrix} -3L \\ L \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_0 \\ -2F_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ -2L \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4F_0 \\ 2F_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2L \\ L \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_0 \\ 3F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{M}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5F_0L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6F_0L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5F_0L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4F_0L \end{bmatrix} = 4F_0L\,\vec{e}_z$$

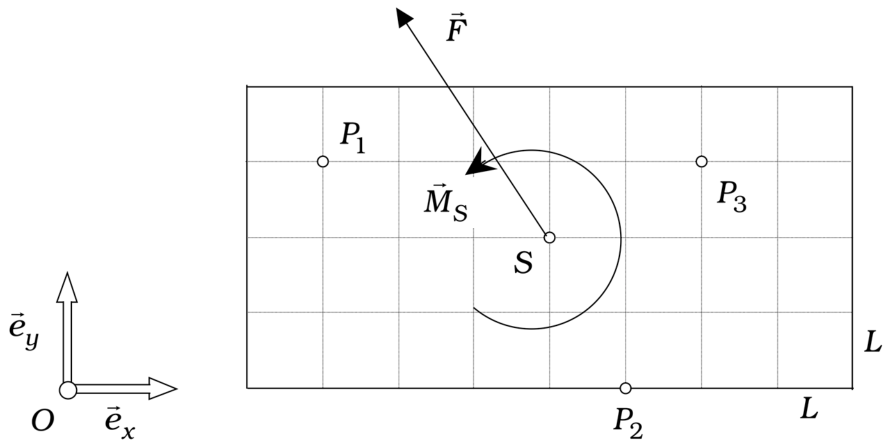
beschrieben wird.

Die **Kräftesumme**

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -2F_0\vec{e}_x + 3F_0\vec{e}_y$$

und die Momentensumme $\vec{M}_s$ bilden die auf S bezogene **Dyname** des Kräftesystems am starren Körper.

Das ursprüngliche Kräftesystem kann also am **starren(!)** Körper ersetzt werden durch die in S angreifende Einzelkraft $\vec{F}$ und den auf der Scheibenebene senkrecht stehenden Momentenvektor $\vec{M}_S$



$$\vec{F} = -2F_0\vec{e}_x + 3F_0\vec{e}_y \qquad \vec{M}_S = 4F_0L\,\vec{e}_z$$

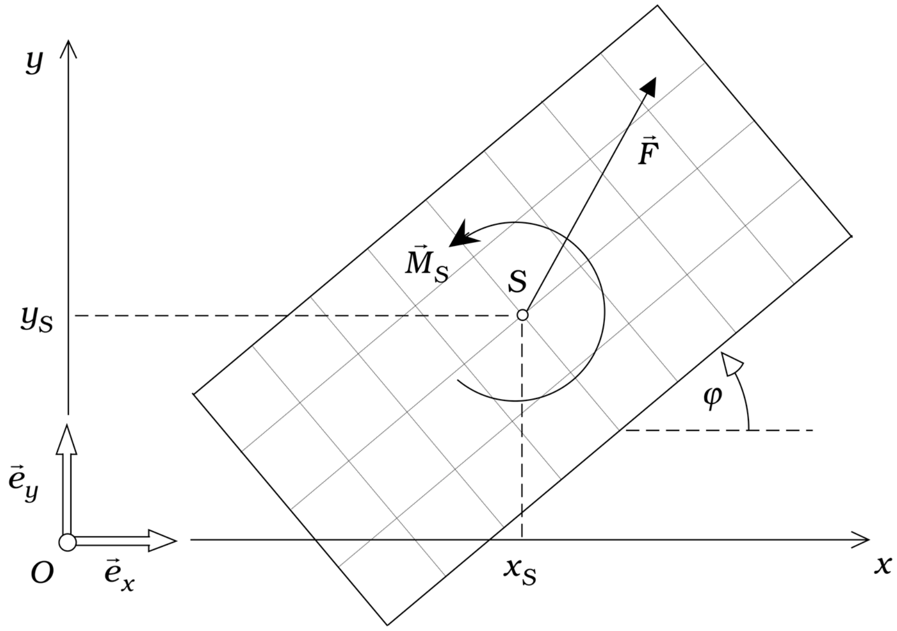
Wie in diesem Beispiel gezeigt, kann jedes beliebige ebene Kräftesystem an einer starren Scheibe in den Schwerpunkt S der Scheibe zu einer Einzelkraft und einem Momentenvektor reduziert werden – bei veränderlichen Kräften in jedem Augenblick zu einer zeitlich veränderlichen Dyname.

Ist die starre Scheibe in der xy-Ebene frei beweglich, so bewirkt die Dyname eine zeitlich veränderliche Verschiebung des Schwerpunktes und eine Drehung der Scheibe um den Schwerpunkt. Die Intensität der Lageänderung bei einer gegebenen Dyname hängt ab von der Größe m der **Masse** der Scheibe und von der Verteilung der Masse um den Schwerpunkt. Das Maß für die Massenverteilung ist das **Massenträgheitsmoment** Θ_S bezogen auf den Schwerpunkt; bei einer Rechteckscheibe mit den Kantenlängen a und b ist

$$\Theta_S = \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

und bei einer Kreisscheibe mit dem Radius r

$$\Theta_S = \frac{m}{2}r^2$$



Die **dynamischen Grundgesetze** für die Scheibenbewegung in der xy-Ebene lauten, wenn

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y \qquad \vec{M}_S = M_S \vec{e}_z$$

die auf S bezogene Dyname der an der Scheibe angreifenden Kräfte ist,

$$\boxed{m\,\dot{\vec{v}}_{S\,abs} = \vec{F} \qquad \Theta_S\,\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_S}$$

$$\boxed{m\begin{bmatrix}\ddot{x}_S \\ \ddot{y}_S\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}F_x \\ F_y\end{bmatrix} \qquad \Theta_S\,\ddot{\varphi} = M_S}$$

$m\,\vec{a}_{S\,abs} = \vec{F}$ ist der **Schwerpunktsatz** /die **NEWTONsche Grundgleichung**,
$\Theta_S \ddot{\varphi} = M_S$ ist der **EULERsche Momentensatz**

Die drei Differentialgleichungen für die drei zeitlich veränderlichen Lagekoordinaten $\{x_s(t), y_S(t), \varphi(t)\}$ der starren Scheibe

$$m\,\ddot{x}_S = F_x$$
$$m\,\ddot{y}_S = F_y$$
$$\Theta_S\,\ddot{\varphi} = M_S$$

müssen gelöst werden, wobei die **Anfangsbedingungen**

$$\{x_S(t=0), y_S(t=0), \varphi(t=0)\}$$
$$\{\dot{x}_S(t=0), \dot{y}_S(t=0), \dot{\varphi}(t=0)\}$$

erforderlich sind, um die tatsächliche Bewegung der Scheibe in Form der drei Funktionen $\{x_s(t), y_S(t), \varphi(t)\}$ zu bestimmen.

Die Lösung der drei Differentialgleichungen

$$m\,\ddot{x}_S = F_x \qquad m\,\ddot{y}_S = F_y \qquad \Theta_S\,\ddot{\varphi} = M_S$$

ist nur in wenigen Fällen mit einfachen Methoden möglich; bei einer von den Koordinaten $\{x_s(t), y_S(t), \varphi(t)\}$ abhängenden Dyname gelingt es fast immer nur unter Einsatz von numerischen Verfahren (Computerprogramme).

Ist $\vec{v}_{S\,abs} = \dot{x}_S\,\vec{e}_x + \dot{y}_S\,\vec{e}_y$ der momentane absolute Geschwindigkeitsvektor des Scheibenschwerpunktes und $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$ der momentane Winkelgeschwindigkeitsvektor der Scheibe, so nennt man

$$\boxed{\vec{p} := m\vec{v}_{S\,abs} = m\,\dot{x}_S\,\vec{e}_x + m\,\dot{y}_S\,\vec{e}_y}$$

den **Impulsvektor** und

$$\boxed{\vec{L}_S := \Theta_S\vec{\omega} = \Theta_S\dot{\varphi}\,\vec{e}_z}$$

den auf den Schwerpunkt S bezogenen **Drehimpulsvektor** der starren Scheibe. Mit diesen Impulsgrößen können Schwerpunkt- und Momentensatz geschrieben werden:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dot{\vec{p}} = \vec{F} & \text{(Impulssatz)} \\ \dot{\vec{L}}_S = \vec{M}_S & \text{(Drehimpulssatz)} \end{array}}$$

$$\vec{F} \equiv \vec{0} \qquad \rightarrow \qquad \vec{p} = const \qquad \text{(Impulserhaltung)}$$

$$\vec{M}_S \equiv \vec{0} \qquad \rightarrow \qquad \vec{L}_S = const \qquad \text{(Drehimpulserhaltung)}$$

Weil nach der Produktregel der Differentialrechnung

$$\ddot{x}_S\dot{x}_S = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}_S{}^2\right) \qquad \ddot{y}_S\dot{y}_S = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{y}_S{}^2\right) \qquad \ddot{\varphi}\,\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\right)$$

ist, folgt aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x}_S\,\dot{x}_S &= F_x\dot{x}_s \\ m\,\ddot{y}_S\,\dot{y}_S &= F_x\dot{y}_S \\ \Theta_S\ddot{\varphi}\dot{\varphi} &= M_S\dot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(m\dot{x}_S{}^2 + m\dot{y}_S{}^2 + \Theta_S\,\dot{\varphi}^2\right)\right) = F_x\dot{x}_S + F_y\dot{y}_S + M_S\dot{\varphi}$$

Man nennt den nach der Zeit differenzierten Term auf der linken Seite die **kinetische Energie** E_{kin} der starren Scheibe

$$\boxed{\begin{aligned} E_{kin} &:= \frac{1}{2}\left(m\dot{x}_S^{\,2} + m\dot{y}_S^{\,2} + \Theta_S\dot{\varphi}^2\right) \\ E_{kin} &:= \frac{1}{2}\left(\vec{p}\circ\vec{v}_{S\,abs} + \vec{L}_S\circ\vec{\omega}\right)\end{aligned}}$$

und den Term auf der rechten Seite die momentane **Leistung** $P(t)$ des an der Scheibe angreifenden Kräftesystems

$$\boxed{\begin{aligned} P(t) &:= F_x\dot{x}_S + F_y\dot{y}_S + M_S\dot{\varphi} \\ P(t) &:= \vec{F}\circ\vec{v}_{S\,abs} + \vec{M}_S\circ\vec{\omega}\end{aligned}}$$

Damit kann die oben aus den drei Bewegungsgleichungen abgeleitete Beziehung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(m\dot{x}_S^{\,2} + m\dot{y}_S^{\,2} + \Theta_S\dot{\varphi}^2\right)\right) = F_x\dot{x}_S + F_y\dot{y}_S + M_S\dot{\varphi}$$

geschrieben werden:

$$\boxed{\frac{d\,E_{kin}}{dt} = P(t)}$$

Das ist der **Leistungssatz**: Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie der starren Scheibe ist gleich der Leistung des angreifenden Kräftesystems.

Wenn die an der Scheibe angreifenden Kräfte so beschaffen sind, dass die Leistung des angreifenden Kräftesystems geschrieben werden kann als *negative* zeitliche Ableitung einer nur von den Lagekoordinaten $\{x_s(t), y_S(t), \varphi(t)\}$ abhängenden Funktion $E_{pot}(x_S, y_S.\varphi)$, die man die **potentielle Energie** des Kräftesystems nennt

$$P(t) = -\dot{E}_{pot}(x_S, y_S.\varphi) = -\left(\frac{\partial E_{pot}}{\partial x_S}\dot{x}_S + \frac{\partial E_{pot}}{\partial y_S}\dot{y}_S + \frac{\partial E_{pot}}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\right)$$

dann folgt aus dem Leistungssatz der **Energiesatz der Mechanik**

$$\boxed{\frac{d\,E_{kin}}{dt} = -\frac{d\,E_{pot}}{dt} \quad\rightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(E_{kin} + E_{pot}\right) = 0 \quad\rightarrow\quad \left(E_{kin} + E_{pot}\right) = const}$$

Ein Kräftesystem mit dieser besonderen Eigenschaft wird **konservatives Kräftesystem** genannt.

Die Maßeinheit der kinetischen Energie ist

$$1\,\text{Kilogramm}\cdot\left(1\,\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}\right)^2 = \underbrace{\left(1\,\frac{\text{Kilogramm}\cdot\text{Meter}}{\text{Sekunde}^2}\right)}_{1\,\text{Newton}}\cdot 1\,\text{Meter} = 1\,\text{Newton}\cdot 1\,\text{Meter} =: 1\,\text{Joule}$$

und die Maßeinheit der Leistung

$$1 \text{ Newton} \cdot \left(1 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}\right) = 1 \frac{\text{Newton} \cdot \text{Meter}}{\text{Sekunde}} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{Sekunde}} =: 1 \text{ Watt}$$

Wird die Leistung des Kräftesystems über ein Zeitintervall $t_1 \le t \le t_2$ integriert, so erhält man die **Arbeit** des Kräftesystems

$$\boxed{W(t_1.t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} F_x \dot{x}_S dt + \int_{t_1}^{t_2} F_y \dot{y}_S dt + \int_{t_1}^{t_2} M_S \dot{\varphi} dt}$$

die das Kräftesystem am starren Körper in diesem Zeitabschnitt geleistet hat. Die Arbeit des Kräftesystems ist gleich der Differenz der kinetischen Energien des Körpers zu den Zeitpunkten t_2 und t_1

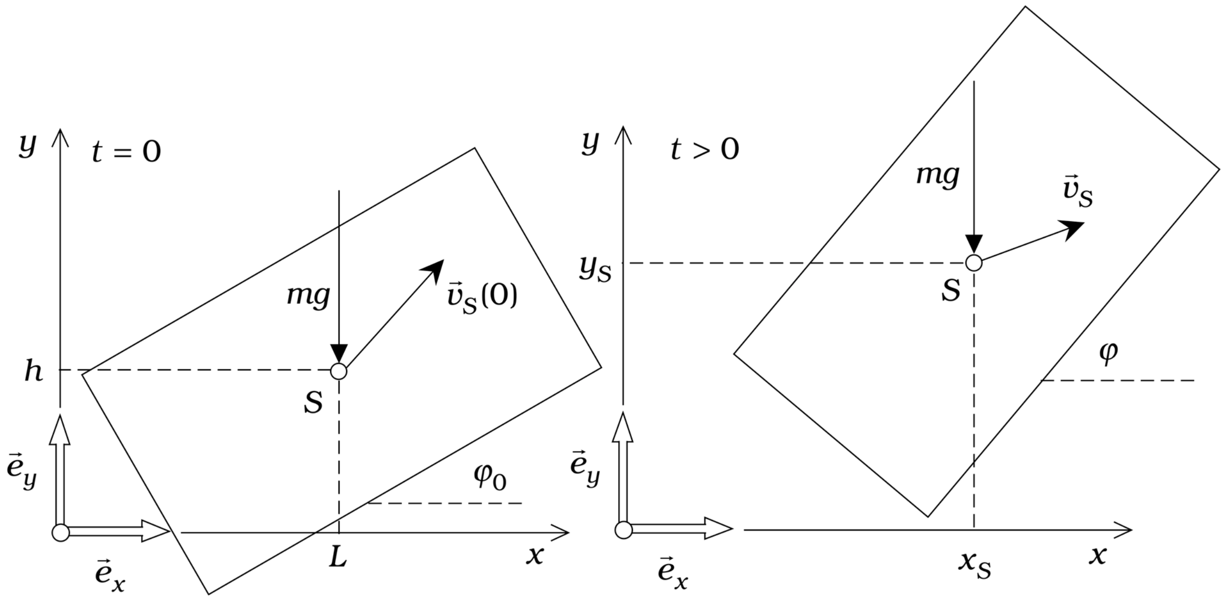
$$E_{kin}\left(t = t_2\right) - E_{kin}\left(t = t_1\right) = W(t_1, t_2)$$

Die Maßeinheit der Arbeit und der potentiellen Energie ist

$$1 \text{ Newton} \cdot 1 \text{ Meter} =: 1 \text{ Joule} .$$

✎ ______________________________

Die Grundgleichungen der ebenen Scheibenbewegung werden nun angewendet auf einige relativ einfache Probleme.



Wird eine starre Rechteckscheibe in der vertikalen xy-Ebene aus der Anfangslage des Schwerpunktes $\left\{x_S(0) = L, \quad y_S(0) = h\right\}$ und der Orientierung $\varphi(0) = \varphi_0$ mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\left\{\dot{x}_S(0) = v_0 \cos(\alpha) \quad \dot{y}_S(0) = v_0 \sin(\alpha)\right\}$ und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ im Schwerkraftfeld, das in Richtung $-\vec{e}_y$ wirkt, gestartet, so gelten für $t > 0$ die Bewegungsdifferentialgleichungen

$$m\ddot{x}_S = 0 \qquad m\ddot{y}_S = -mg \qquad \Theta_S\ddot{\varphi} = 0$$

weil auf die Scheibe nur die im Schwerpunkt angreifende Gewichtskraft

$$\vec{F} = -mg\,\vec{e}_y \qquad g = 9{,}81\,\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}^2}$$

wirkt und das auf den Schwerpunkt bezogene Moment der in S angreifenden Kraft null ist.

Die drei Bewegungsdifferentialgleichungen können einfacher geschrieben und leicht allgemein gelöst werden:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_S &= 0 & \dot{x}_S &= C_1 & x_S &= C_1 t + C_4 \\ \ddot{y}_S &= -g & \dot{y}_S &= -gt + C_2 & y_S &= -\frac{1}{2}gt^2 + C_2 t + C_5 \\ \ddot{\varphi} &= 0 & \dot{\varphi} &= C_3 & \varphi &= C_3 t + C_6 \end{aligned}$$

Die sechs Konstanten $C_1,\ldots,C_6$ erlauben die Anpassung der Funktionen an die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$.

$$\begin{aligned} v_0 \cos(\alpha) &= C_1 & L &= C_4 \\ v_0 \sin(\alpha) &= C_2 & h &= C_5 \\ \omega_0 &= C_3 & \varphi_0 &= C_6 \end{aligned}$$

Die Bewegungsgesetze der starren Scheibe lauten somit

$$\boxed{\begin{aligned} x_S(t) &= v_0 \cos(\alpha) t + L \\ y_S(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha) t + h \\ \varphi(t) &= \omega_0 t + \varphi_0 \end{aligned}}$$

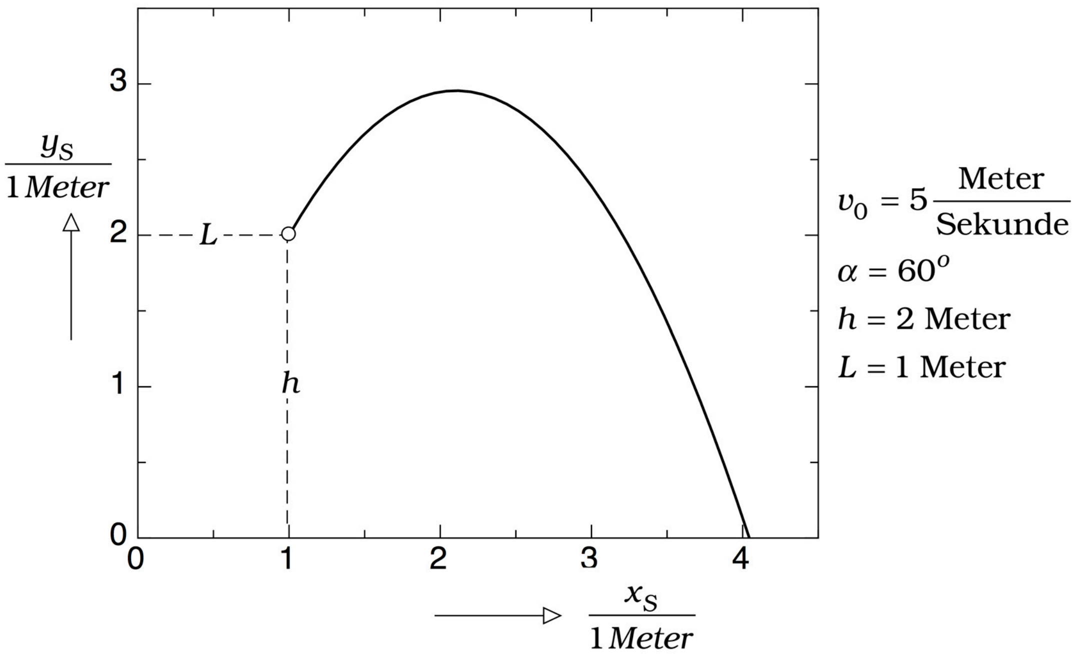
Mit

$$t = \frac{x_S - L}{v_0 \cos(\alpha)}$$

erhält man die Bahnkurve $y_S(x_S)$ des Scheibenschwerpunktes

$$\boxed{y_S = -\frac{1}{2}\frac{g}{\left(v_0 \cos(\alpha)\right)^2}\left(x_S - L\right)^2 + \tan(\alpha)\left(x_S - L\right) + h}$$

Der Schwerpunkt S bewegt sich auf einer Parabel in der vertikalen xy-Ebene.



Die Bahn des Scheibenschwerpunktes S ist eine Parabel in der vertikalen xy-Ebene, die man Wurfparabel nennt.

Den höchsten Punkt der Flugbahn erreicht der Schwerpunkt S zum Zeitpunkt $t = t^*$, wenn $\dot{y}(t^*) = 0$ ist:

$$-g\,t^* + v_0 \sin(\alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad t^* = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}.$$

$$x_S(t^*) = \frac{v_0{}^2 \sin(2\alpha)}{2g} + L, \qquad y_S(t^*) = \frac{\left(v_0 \sin(\alpha)\right)^2}{2g} + h$$

Die Ebene $y = 0$ wird zum Zeitpunkt $t = T$ erreicht, wenn

$$y_S(T) = -\frac{1}{2} g T^2 + v_0 \sin(\alpha) T + h = 0$$

$$T^2 - 2\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} T = \frac{2h}{g}$$

ist. Aus dieser quadratischen Gleichung für T folgt,

$$\left(T - \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}\right)^2 = \frac{2h}{g} + \left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}\right)^2$$

und, weil $T > 0$ sein muss,

$$T = \frac{1}{g}\left(v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{2hg + \left(v_0 \sin(\alpha)\right)^2}\right).$$

Der Schwerpunkt erreicht die Ebene $y = 0$ auf der x-Achse im Punkt

$$x_S(T) = v_0 \cos(\alpha)\, T + L\,.$$

Während der Wurfbewegung dreht sich die Scheibe mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi}(t) = \omega_0\,.$$

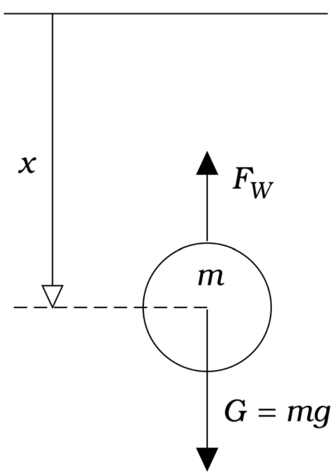
Wenn die bisher vernachlässigte Luftreibung berücksichtigt werden soll, ist die Wurfbewegung nicht mehr so relativ leicht zu berechnen, weil dann die zu lösenden Differentialgleichungen nichtlinear werden und numerische Methoden erforderlich sind. Nur im Spezialfall der senkrechten Fallbewegung einer Kugel der Masse m im Schwerkraftfeld kann die Fallgeschwindigkeit als Funktion des zurückgelegten Fallweges mit Hilfe bekannter Funktionen berechnet werden.
Bei der senkrechten Fallbewegung mit Luftreibung wirken auf die fallende Kugel der Masse m die Gewichtskraft $G = mg$ und der Luftwiderstand

$$F_W = \frac{1}{2} c_W \rho_{Luft} A_S\, v^2$$

Dabei ist c_W der von der Körperform abhängende dimensionslose Widerstandsbeiwert des fallenden Körpers,

$$\rho_{Luft} = 1{,}22 \frac{\text{Kilogramm}}{\text{Meter}^3}$$

die Massendichte der Luft, A_S die Schattenfläche des Körpers (größter Querschnitt des Körpers senkrecht zur Geschwindigkeit) und v die momentane Fallgeschwindigkeit in der ruhenden Luft.



Nach dem NEWTONschen Grundgesetz lautet die Bewegungsgleichung des Körperschwerpunktes für die x-Richtung

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = G - F_W$$

Mit der momentanen Geschwindigkeit des Kugelschwerpunktes S

$$v = \frac{dx}{dt}$$

gilt also

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2}c_W \rho_{Luft} A_S\, v^2$$

Berechnet werden soll die Fallgeschwindigkeit als Funktion der Koordinate x, wenn für $x = 0$ die Geschwindigkeit $v = 0$ ist.

In der schlanker formulierten Bewegungsgleichung

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{2}\lambda v^2, \qquad \lambda := \frac{c_W \rho_{Luft} A_S}{m}$$

kann man, wenn man v als Funktion des zurückgelegten Weges x berechnen will, nach den Regeln der Differentialrechnung schreiben

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Mit der Abkürzung

$$u := \frac{1}{2}v^2$$

erhält man aus der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = g - \frac{1}{2}\lambda v^2$$

die lineare Differentialgleichung für $u(x)$

$$\frac{du}{dx} = -\lambda\left(u - \frac{g}{\lambda}\right) \qquad \to \qquad \frac{1}{\left(u - \frac{g}{\lambda}\right)}\frac{du}{dx} = -\lambda$$

Die Umformung der linken Seite, wieder mit Hilfe der Kettenregel, ergibt

$$\frac{1}{\left(u-\frac{g}{\lambda}\right)}\frac{du}{dx}=\frac{d\ln\left(u-\frac{g}{\lambda}\right)}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\ln\left(u(x)-\frac{g}{\lambda}\right)$$

Damit lautet die zu lösende Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\ln\left(u(x)-\frac{g}{\lambda}\right)=-\lambda$$

und mit der Integrationskonstanten K_1 erhält man

$$\ln\left(u(x)-\frac{g}{\lambda}\right)=-\lambda x+K_1$$

$$u(x)-\frac{g}{\lambda}=e^{-\lambda x+K_1}=e^{K_1}e^{-\lambda x}=:C_1e^{-\lambda x}$$

$$u(x)=\frac{g}{\lambda}+C_1e^{-\lambda x}$$

also

$$v^2=2\left(\frac{g}{\lambda}+C_1e^{-\lambda x}\right)$$

Aus der Anfangsbedingung $v(x=0)=0$ folgt für die Integrationskonstante C_1

$$C_1=-\frac{g}{\lambda}$$

und die gesuchte Fallgeschwindigkeit als Funktion des Fallweges lautet:

$$\boxed{v(x)=\sqrt{\frac{2g}{\lambda}}\sqrt{1-e^{-\lambda x}}}$$

Die Fallgeschwindigkeit nähert sich der Grenzgeschwindigkeit

$$v^*:=\sqrt{\frac{2g}{\lambda}}$$

Hat die Kugel die Masse $m=0{,}6\,\text{Kilogramm}$, den Durchmesser $d=0{,}4\,\text{Meter}$ und den Widerstandsbeiwert $c_W=0{,}6$, so wird

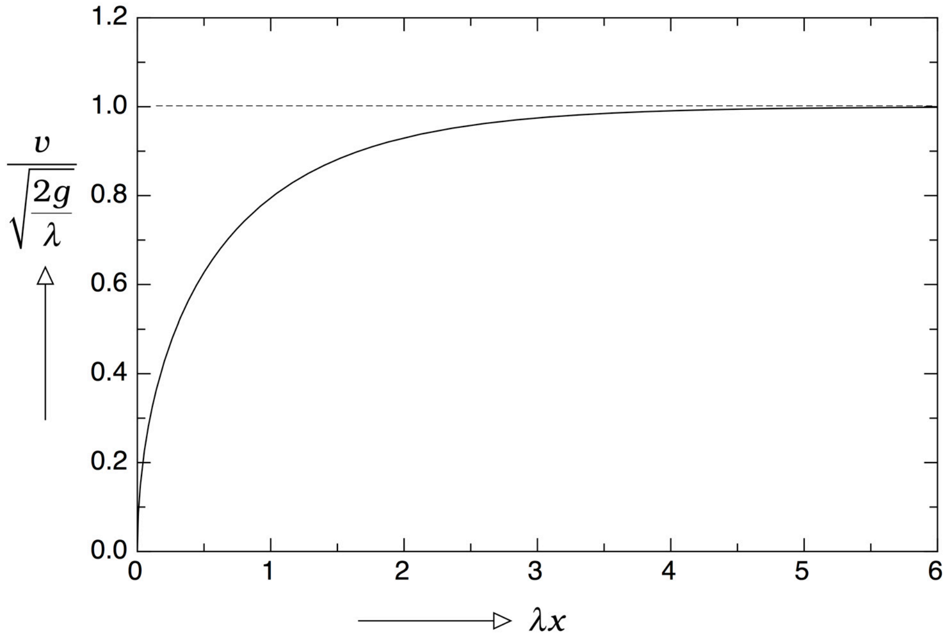
$$A_S=\frac{\pi}{4}d^2=0{,}1256\,\text{Meter}^2,\ \lambda=\frac{c_W\rho_{Luft}A_S}{m}=0{,}153\,\text{Meter}^{-1},$$

$$v^*=\sqrt{\frac{2g}{\lambda}}=11{,}32\ \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$$

Diese Grenzgeschwindigkeit ist für

$$\lambda x = 5 \quad \rightarrow \quad x = 32{,}7\,\text{Meter}$$

fast erreicht.



Wenn man aus der Formel für $v(x)$ die Fallgeschwindigkeit bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes $(\lambda = 0)$ als Sonderfall ableiten will, muss die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion eingeführt werden

$$e^{-\lambda x} = 1 - \lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} - \frac{(\lambda x)^3}{3!} \pm \ldots$$

Man erhält dann für $v(x)$ die Darstellung

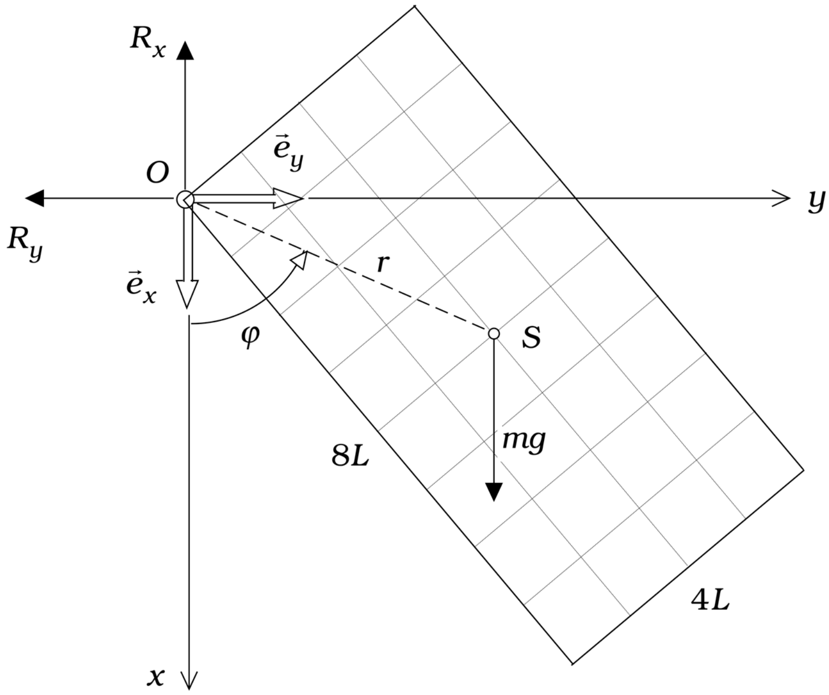
$$v(x) = \sqrt{2g}\sqrt{\frac{1-e^{-\lambda x}}{\lambda}} = \sqrt{2g}\sqrt{x - \lambda\,\frac{x^2}{2!} + \lambda^2\,\frac{x^3}{3!} \mp \ldots}$$

mit dem Ergebnis

$$v(x)_{\lambda=0} = \sqrt{2gx}$$

✎ ______________________________

Meistens sind die Bewegungsgesetze von Körpern zu berechnen, deren Bewegungsmöglichkeiten durch **kinematische Zwangsbedingungen** eingeschränkt sind. Dann wirken auf den Körper nicht nur bekannte eingeprägte Kräfte, sondern auch zunächst unbekannt **Reaktionskräfte**, die für die Einhaltung der vorgeschriebenen Zwangsbedingungen erforderlich sind. Wird beispielsweise eine rechteckige Scheibe der Masse m in einem Eckpunkt drehbar gelagert, so ist nur noch der Drehwinkel φ die zur Lagebeschreibung erforderliche Koordinate.



Der Schwerpunkt S bewegt sich auf einem Kreis mit dem Radius

$$r = \sqrt{(4L)^2 + (2L)^2} = \sqrt{20}\,L$$

um den festen Lagerpunkt O, in dem die noch unbekannte Reaktionskraft

$$\vec{R} = -R_x\vec{e}_x - R_y\vec{e}_y$$

angreift. Für die kartesischen Koordinaten des Schwerpunktes gelten die kinematischen Zwangsbedingungen

$$\boxed{x_S = r\cos(\varphi) \qquad y_S = r\sin(\varphi)}$$

aus denen, weil φ eine noch unbekannte Funktion der Zeit ist,

$$\dot{x}_S = -r\dot{\varphi}\sin(\varphi) \qquad \dot{y}_S = r\dot{\varphi}\cos(\varphi)$$

und

$$\ddot{x}_S = -r\ddot{\varphi}\sin(\varphi) - r\dot{\varphi}^2\cos(\varphi) \qquad \ddot{y}_S = r\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}^2\sin(\varphi)$$

folgt. Die Bewegungsgleichungen der Scheibe lauten zunächst

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x}_S &= mg - R_x \\ m\,\ddot{y}_S &= -R_y \\ \Theta_S\ddot{\varphi} &= -R_x r\sin(\varphi) + R_y r\cos(\varphi) \end{aligned} \qquad \Theta_S = \frac{m}{12}\left((8L)^2 + (4L)^2\right) = \frac{20}{3}mL^2 = \frac{1}{3}mr^2$$

Die beiden unbekannten Reaktionskraftkomponenten R_x und R_y kann man aus den drei Bewegungsgleichungen, die der Schwerpunktsatz und der Momentensatz geliefert haben, eliminieren, indem man die erste Gleichung mit $\left(-r\sin(\varphi)\right)$ und die zweite mit $\left(r\cos(\varphi)\right)$ multipliziert

$$\begin{aligned}-m\,\ddot{x}_S\,r\sin(\varphi) &= -mg\,r\sin(\varphi) + R_x\,r\sin(\varphi)\\ m\,\ddot{y}_S\,r\cos(\varphi) &= -R_y\,r\cos(\varphi)\\ \Theta_S\ddot{\varphi} &= -R_x\,r\sin(\varphi) + R_y\,r\cos(\varphi)\end{aligned}$$

und anschließend die drei Gleichungen addiert.

$$mr\left(-\ddot{x}_S\sin(\varphi) + \ddot{y}_S\cos(\varphi)\right) + \Theta_S\ddot{\varphi} = -mgr\sin(\varphi)$$

Weil

$$\begin{aligned}-\ddot{x}_S\sin(\varphi) &= r\ddot{\varphi}\left(\sin(\varphi)\right)^2 + r\dot{\varphi}^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\\ \ddot{y}_S\cos(\varphi) &= r\ddot{\varphi}\left(\cos(\varphi)\right)^2 - r\dot{\varphi}^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\end{aligned}$$

ist, wird

$$-\ddot{x}_S\sin(\varphi) + \ddot{y}_S\cos(\varphi) = r\ddot{\varphi}$$

und die Bewegungsgleichung für die Drehbewegung der Scheibe lautet schließlich

$$\left(mr^2 + \Theta_S\right)\ddot{\varphi} = -mgr\sin(\varphi) \qquad \Theta_S = \frac{1}{3}mr^2$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{4r}\sin(\varphi)}$$

Aus dieser nichtlinearen Bewegungsgleichung folgt zunächst nach Multiplikation mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi}\,\ddot{\varphi} + \frac{3g}{4r}\sin(\varphi)\,\dot{\varphi} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{3g}{4r}\cos(\varphi)\right) = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{3g}{4r}\cos(\varphi)\right) = const}$$

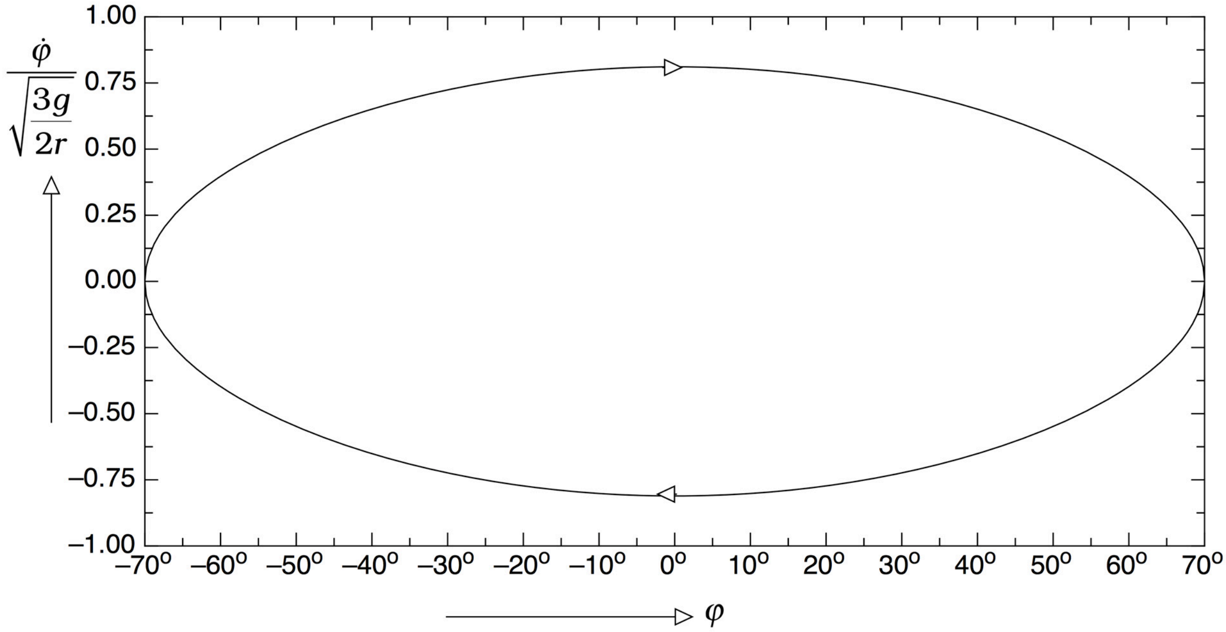
Nun kommen die Anfangsbedingungen ins Spiel: Wird die Scheibe zum Zeitpunkt $t = 0$ ohne Anfangsgeschwindigkeit $\left(\dot{\varphi}(t=0) = 0\right)$ aus der Lage $\left(\varphi(t=0) = \varphi_0\right)$ gestartet, so gilt

$$\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{3g}{4r}\cos(\varphi)\right) = -\frac{3g}{4r}\cos(\varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{3g}{2r}\left(\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)\right)$$

$$\boxed{\dot{\varphi}(\varphi) = \pm\sqrt{\frac{3g}{2r}\left(\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)\right)}}$$

Weil $\left(\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)\right) \geq 0$ bleiben muss, pendelt die Scheibe im Winkelbereich $\left(-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0\right)$ mit von φ abhängender Winkelgeschwindigkeit hin und her. Man nennt die Scheibe deshalb auch physikalisches Pendel. Im folgenden Bild ist $\varphi_0 = 70°$ als Anfangsstellung der Scheibe gewählt; die Kurve wird im Uhrzeigersinn durchlaufen.



Die Reaktionskräfte

$$R_x = mg - m\ddot{x}_S \qquad R_y = -m\ddot{y}_S$$

können mit

$$\ddot{x}_S = -r\ddot{\varphi}\sin(\varphi) - r\dot{\varphi}^2\cos(\varphi) \qquad \ddot{y}_S = r\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}^2\sin(\varphi)$$

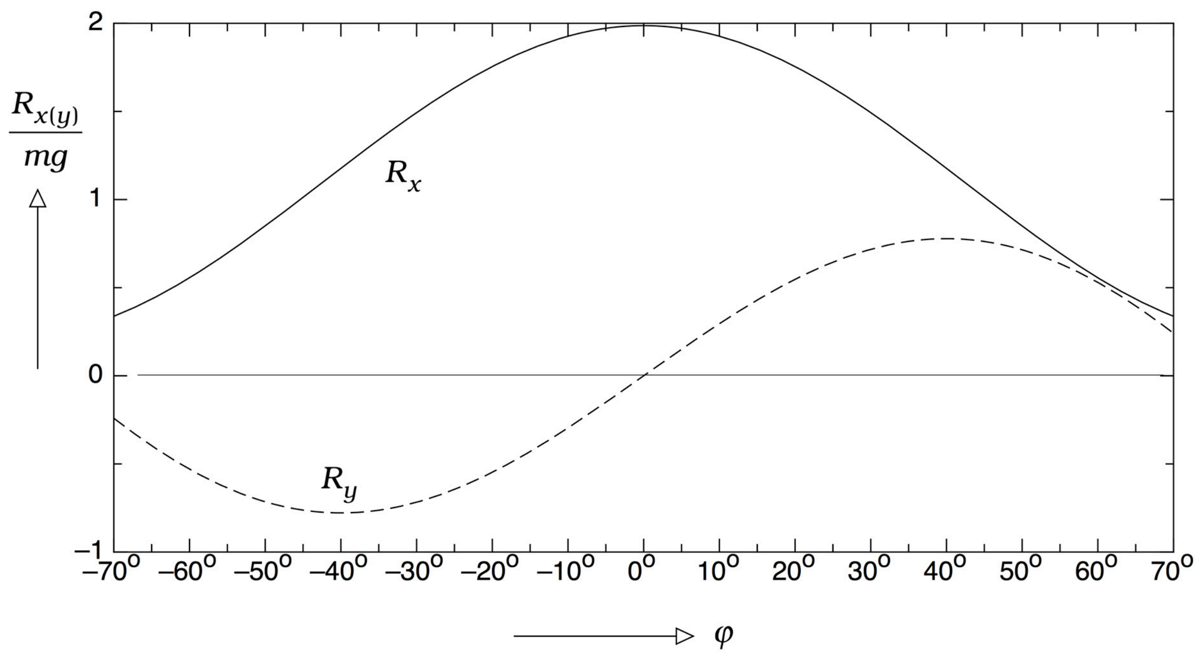
und

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{4r}\sin(\varphi), \qquad \dot{\varphi}^2 = \frac{3g}{2r}\left(\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)\right)$$

als Funktionen des Winkels φ berechnet werden.

$$R_x = mg\left\{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}\left(\cos(\varphi)\right)^2 - \frac{3}{2}\cos(\varphi)\cos(\varphi_0)\right\}$$

$$R_y = mg\left\{\frac{9}{4}\sin(\varphi)\cos(\varphi) - \frac{3}{2}\sin(\varphi)\cos(\varphi_0)\right\}$$



Die Berechnung der Funktion $\varphi(t)$ aus der nichtlinearen Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{4r}\sin(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} \pm \ldots$$

ist mit Hilfe elementarer Funktionen nicht möglich; man muss dann numerische Methoden zu Hilfe nehmen (z.B. ein RUNGE-KUTTA-Verfahren). Da sich die Bewegung der Scheibe aber auf den Winkelbereich $(-\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0)$ beschränkt, ist eine annähernde Berechnung von $\varphi(t)$ möglich, wenn φ_0 eine kleiner Winkel ist. Aus der Tabelle

φ_0	φ_0	$\sin(\varphi_0)$
5^o	$0,0873$	$0,0872$
10^o	$0,1745$	$0,1736$
15^o	$0,2618$	$0,2588$

kann man ablesen, dass, wenn $|\varphi_0| \ll 1$ ist, **näherungsweise** $\sin(\varphi) \approx \varphi$ gesetzt werden kann. Dann ist die Differentialgleichung für $\varphi(t)$ **linearisiert**

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{4r}\varphi$$

und sie lässt sich einfach lösen. Zunächst wird gesetzt

$$\omega_0{}^2 := \frac{3g}{4r}$$

und man erhält mit

$$\boxed{\ddot{\varphi} + {\omega_0}^2 \varphi = 0}$$

eine lineare Differentialgleichung, deren **allgemeine Lösung**

$$\boxed{\varphi(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)}$$

lautet, weil

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t) \\ \dot{\varphi}(t) &= \omega_0 \left(C_1 \cos(\omega_0 t) - C_2 \sin(\omega_0 t)\right) \\ \ddot{\varphi}(t) &= -{\omega_0}^2 \underbrace{\left(C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)\right)}_{\varphi(t)} \end{aligned}$$

ist. Mit den beiden Konstanten C_1 und C_2 kann man die allgemeine Lösung an zwei frei wählbare Anfangsbedingungen, also beispielsweise

$$\varphi(t = 0) = \varphi_0 \qquad \dot{\varphi}(t = 0) = 0$$

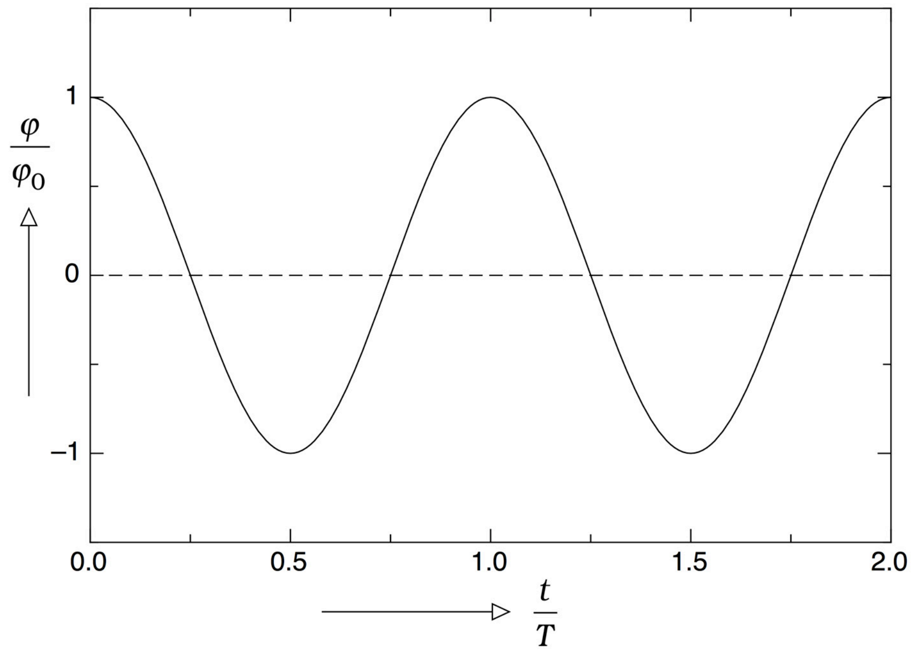
anpassen:

$$\begin{aligned} C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) &= \varphi_0 \\ \omega_0 \left(C_1 \cos(0) - C_2 \sin(0)\right) &= 0 \end{aligned} \qquad C_2 = \varphi_0 \qquad C_1 = 0$$

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)}$$

Die Bewegung der Scheibe bei klein bleibender Winkelkoordinate ist also eine harmonische Schwingung mit der **Schwingungsdauer**

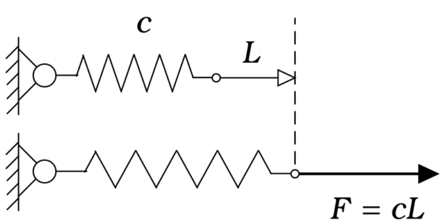
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{4r}{3g}}}$$



Bemerkenswert ist, dass die Schwingungsdauer nicht von der Masse des starren Körpers abhängt (aber nur, weil die Luftreibungskräfte im Berechnungsmodell vernachlässigt wurden).

✎ ———————————————

Beim physikalischen Pendel erzeugt die Gewichtskraft das rückstellende Drehmoment in die Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ des Pendels. Ohne Reibung schwingt das Pendel um die Gleichgewichtslage. Entsprechende Schwingungsbewegungen kann man auch erzeugen, wenn man eine Masse m an eine aus Metalldraht hergestellte Feder hängt. Wenn man eine solche Feder um L verlängern will, muss man eine Kraft F aufwenden, die näherungsweise linear mit der Federverlängerung wächst.

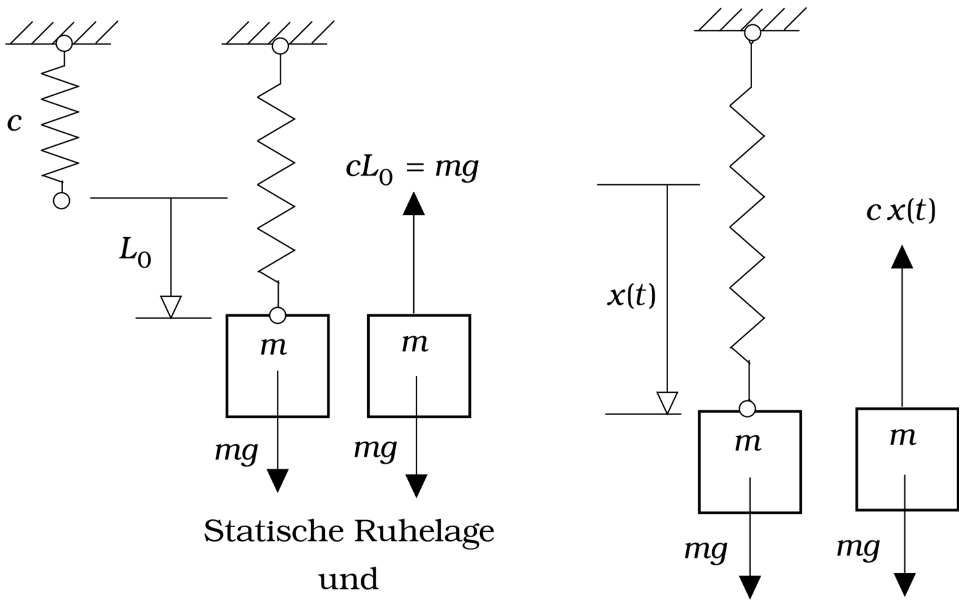


Wird also eine Masse m im Schwerkraftfeld an eine Feder mit der **Steifigkeit** c gehängt, so verlängert die Gewichtskraft die Feder um L_0 und die Federkraft cL_0 kompensiert die Gewichtskraft mg, wobei

$$mg = cL_0 \qquad L_0 = \frac{mg}{c}$$

ist. Man nennt L_0 die **statische Ruhelage** des Feder-Masse-Systems.

Ist die Feder um $x > L_0$ ausgelenkt, so wird die Federkraft größer als die Gewichtskraft und wenn man die Masse in einer Lage $x_0 > L_0$ loslässt, beginnt eine Schwingungsbewegung.



Statische Ruhelage
und
Freikörperbild

Momentane Lage
und
Freikörperbild

Die Bewegung der Masse m muss dem NEWTONschen Grundgesetz (Impulssatz) gehorchen:

$$m \frac{d}{dt}\left(\frac{d\,x(t)}{dt}\right) = mg - cx(t)\,,$$

$$\boxed{m\ddot{x} = mg - cx, \qquad \ddot{x} + \omega_0{}^2\, x = g, \qquad \omega_0{}^2 := \frac{c}{m}}$$

Die Lösung dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung für $x(t)$ lautet

$$x(t) = \frac{g}{\omega_0{}^2} + C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

oder wegen

$$\frac{g}{\omega_0{}^2} = \frac{mg}{c} = L_0$$

$$x(t) = L_0 + C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)\,.$$

Die Konstanten C_1 und C_2 stehen für die Anpassung des Bewegungsgesetzes $x(t)$ der Masse m an frei wählbare Anfangsbedingungen zur Verfügung.

$$x(t=0)=x_0=L_0+C_1 \qquad \dot{x}(t=0)=v_0=\omega_0 C_2$$

$$\boxed{x(t)=L_0+\left(x_0-L_0\right)\cos(\omega_0 t)+\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

Dieses Bewegungsgesetz kann auch geschrieben werden

$$x(t)=L_0+A\sin(\omega_0 t+\alpha)$$

denn mit dem Additionstheorem der Winkelfunktionen gilt

$$x(t)=L_0+A\left(\sin(\omega_0 t)\cos(\alpha)+\cos(\omega_0 t)\sin(\alpha)\right).$$

Ein Vergleich mit

$$x(t)=L_0+\left(x_0-L_0\right)\cos(\omega_0 t)+\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

liefert die Gleichungen

$$A\cos(\alpha)=\frac{v_0}{\omega_0} \qquad A\sin(\alpha)=x_0-L_0$$

Daraus folgt

$$\left(A\cos(\alpha)\right)^2+\left(A\sin(\alpha)\right)^2=A^2=\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2+\left(x_0-L_0\right)^2$$

$$\frac{A\sin(\alpha)}{A\cos(\alpha)}=\tan(\alpha)=\frac{\left(x_0-L_0\right)\omega_0}{v_0}$$

$$\boxed{\begin{gathered} x(t)=L_0+A\sin(\omega_0 t+\alpha) \\ A=\sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2+\left(x_0-L_0\right)^2} \qquad \alpha=\arctan\left(\frac{\left(x_0-L_0\right)\omega_0}{v_0}\right) \end{gathered}}$$

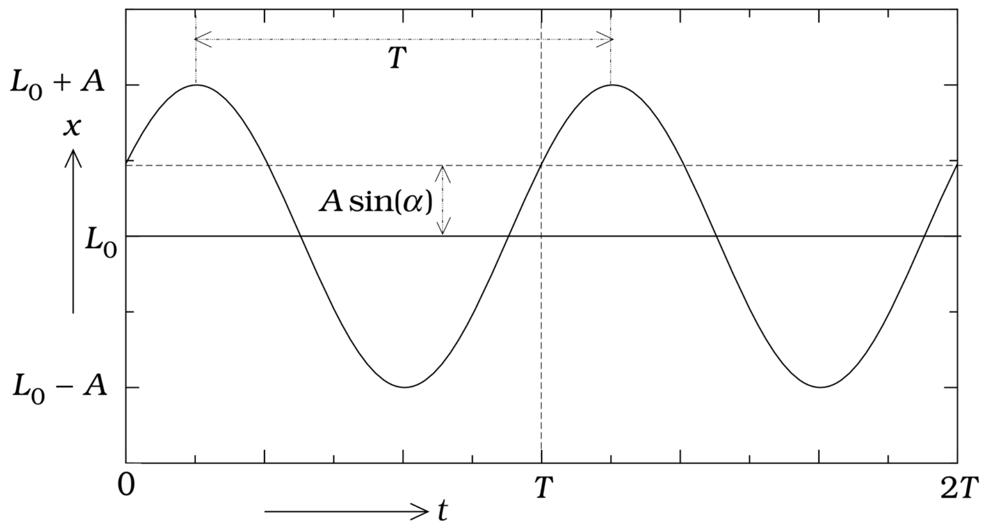
Wenn $v_0=0$ ist, wird $\alpha=\pi/2$. A ist die **Amplitude**, α die **Phasenverschiebung** und ω_0 die **Kreisfrequenz** der harmonischen Schwingung des Feder-Masse-Systems um die statische Ruhelage; die Gewichtskraft bestimmt nur die statische Auslenkung $L_0=mg/c$.

Die **Schwingungsdauer**

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

ist – im Gegensatz zur Schwingungsdauer des physikalischen Pendels – von der

Masse abhängig.



Wenn man die Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{x} = mg - c\,x$$

mit der Geschwindigkeit $\dot{x}$ multipliziert, erhält man die Gleichung

$$m\,\ddot{x}\,\dot{x} = mg\,\dot{x} - c\,x\,\dot{x}$$

die auch

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(mgx - \frac{1}{2}cx^2\right)$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \left(-mgx + \frac{1}{2}cx^2\right)\right) = 0$$

geschrieben werden kann. Dabei ist

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

die momentane kinetische Energie der schwingenden Masse m und

$$E_{pot} = -mgx + \frac{1}{2}cx^2$$

die momentane potentielle Energie der Masse m infolge der Schwerkraft $(-mgx)$ und der Federkraft $\left(\frac{1}{2}cx^2\right)$ in der Lage x. Es gilt also für das Feder-Masse-System der Energiesatz der Mechanik

$$\frac{d}{dt}\left(E_{kin} + E_{pot}\right) = 0 \qquad E_{kin} + E_{pot} = const$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \left(-mgx + \frac{1}{2}cx^2\right) = \frac{1}{2}mv_0{}^2 + \left(-mgx_0 + \frac{1}{2}cx_0{}^2\right)}$$

Die Gewichtskraft und die Federkraft sind konservative Kräfte, denn es gilt für die Kraftkomponenten in x-Richtung:

$$F_{x(Federkraft)} = -cx = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}cx^2\right) = -\frac{d}{dx}\left(E_{pot(Federkraft)}\right)$$

$$F_{x(Gewichtskraft)} = mg = -\frac{d}{dx}\left(-mgx\right) = -\frac{d}{dx}\left(E_{pot(Gewichtskraft)}\right)$$

In der momentanen Lage x ist

$$P_{Gewichtskraft} = \left(mg\vec{e}_x\right) \circ \left(\dot{x}\vec{e}_x\right) = mg\dot{x}$$

die Leistung der Gewichtskraft und

$$P_{Federkraft} = \left(-cx\vec{e}_x\right) \circ \left(\dot{x}\vec{e}_x\right) = -cx\dot{x}$$

die Leistung der Federkraft.

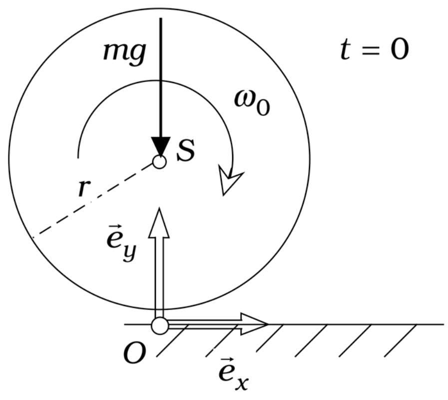
Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie der Masse m ist also gleich der Summe der Leistungen der angreifenden Kräfte (Leistungssatz):

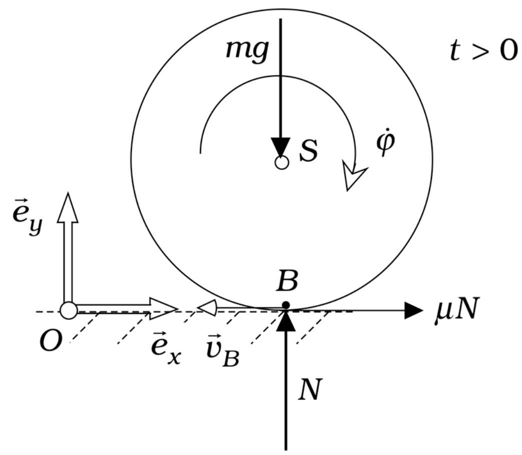
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(mgx - \frac{1}{2}cx^2\right) = mg\dot{x} - cx\dot{x}$$

✎ ———————————————

Im folgenden Beispiel wird die Bewegung eines Rades untersucht, das auf einer horizontalen rauen Ebene gleiten und rollen kann und in einem speziellen Anfangszustand Kontakt mit der Ebene bekommt.

Ein kreisscheibenförmiges Rad (Masse m, Radius r), das um seine zur Scheibenebene senkrechte Achse durch den Schwerpunkt S mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 rotiert, wird auf eine horizontale raue Ebene gesetzt und bewegt sich dann auf dieser Ebene.





Zum Zeitpunkt $t = 0$ berührt das Rad die Ebene, und der momentane Kontaktpunkt B des Rades hat die Geschwindigkeit

$$v_B(t = 0) = -r\omega_0 \vec{e}_x$$

während für den Schwerpunkt S noch

$$v_S(t = 0) = \vec{0}$$

gilt.

Die Gleitbewegung des Scheibenumfangs auf der rauen Ebene generiert die **Gleitreibungskraft**, die der Geschwindigkeit des momentanen Kontaktpunktes B des Rades entgegengesetzt gerichtet ist und in guter Näherung durch das **NEWTONsche Gesetz der Gleitreibung**

$$\boxed{\vec{F}_R = -\mu N \frac{\vec{v}_B}{\left|\vec{v}_B\right|}}$$

beschrieben werden kann, N ist die Reaktionskraft, mit der die Ebene das Rad vertikal stützt und μ der **Gleitreibungskoeffizient**, der von der Rauigkeit der sich berührenden Flächen von Rad und Ebene abhängt und experimentell bestimmt werden muss.

Solange die Geschwindigkeit des momentanen Kontaktpunktes des Rades

$$\vec{v}_B = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \overrightarrow{SB} = \dot{x}_S \, \vec{e}_x + \left(-\dot{\varphi}\, \vec{e}_z\right) \times \left(-r\, \vec{e}_y\right) = \left(\dot{x}_S - r\dot{\varphi}\right)\vec{e}_x$$

noch **nicht** null ist, wirkt die Gleitreibungskraft und es gelten während der Gleit- und Drehbewegung des Rades die Grundgesetze

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_S &= \mu N \\ m\ddot{y}_S &= N - mg \qquad\qquad \Theta_S = \frac{1}{2} m r^2 \\ \Theta_S \ddot{\varphi} &= -\mu N r \end{aligned}$$

Mit der kinematischen Zwangsbedingung $y_S \equiv r$ erhält man die folgenden Differentialgleichungen für die veränderlichen Koordinaten $x_S(t)$ und $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_S &= \mu N \\ 0 &= N - mg \\ \Theta_S\ddot{\varphi} &= -\mu N r \end{aligned} \qquad \begin{aligned} m\ddot{x}_S &= \mu m g \\ \frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi} &= -\mu m g r \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \ddot{x}_S &= \mu g \\ \ddot{\varphi} &= -2\mu\frac{g}{r} \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich zunächst mit den Anfangsbedingungen

$$\dot{x}_S(0) = 0, \qquad \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

die Schwerpunkts- und die Winkelgeschwindigkeit des Rades

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_S(t) &= \mu g t \\ \dot{\varphi}(t) &= -2\mu\frac{g}{r}t + \omega_0 \end{aligned}} \qquad \to \qquad \vec{v}_B(t) = \left(\dot{x}_S(t) - r\dot{\varphi}(t)\right)\vec{e}_x = \left(3\mu g t - r\omega_0\right)\vec{e}_x$$

die bis zum Zeitpunkt $t = T_0$ gelten, in dem die Geschwindigkeit des momentanen Kontaktpunktes B null wird, also die Gleitbewegung zuende ist:

$$3\mu g T_0 - r\omega_0 = 0 \qquad \to \qquad T_0 = \frac{r\omega_0}{3\mu g}$$

Dann ist

$$\dot{x}_S(T_0) = \mu g T_0 = \frac{1}{3}r\omega_0$$

$$\dot{\varphi}(T_0) = -2\mu\frac{g}{r}T_0 + \omega_0 = \frac{1}{3}\omega_0$$

Im Zeitintervall $0 \le t \le T_0$ gilt für die Koordinaten x_S und φ wegen der Anfangsbedingungen

$$x_S(0) = 0 \qquad \varphi(0) = 0$$

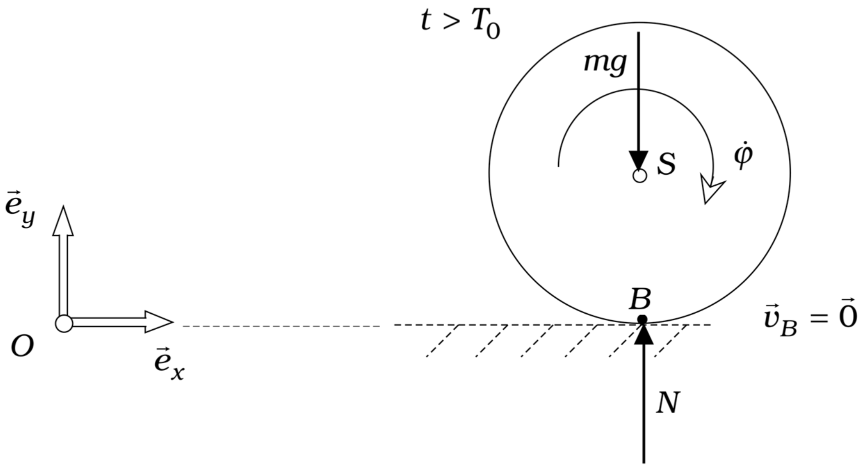
$$\boxed{\begin{aligned} x_S(t) &= \frac{1}{2}\mu g t^2 \\ \varphi(t) &= -\mu\frac{g}{r}t^2 + \omega_0 t \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} x_S(T_0) &= \frac{1}{2}\mu g {T_0}^2 = \frac{(r\omega_0)^2}{18\mu g} \\ \varphi(T_0) &= -\mu\frac{g}{r}{T_0}^2 + \omega_0 T_0 = \frac{2r{\omega_0}^2}{9\mu g} \end{aligned}$$

Im nächsten Bewegungsabschnitt des Rades für $t > T_0$ hat der momentane Berührungspunkt des Rades keine Geschwindigkeit und es gilt dauernd die kinematische **Rollbedingung**

$$\vec{v}_B = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \overrightarrow{SB} = \left(\dot{x}_S - r\dot{\varphi}\right)\vec{e}_x = \vec{0}$$

$$\dot{x}_S = r\dot{\varphi} = \frac{1}{3}r\omega_0$$

Das folgende Bild zeigt die dann auf das Rad wirkenden Kräfte.



Die Differentialgleichungen für die Koordinaten $x_S(t)$ und $\varphi(t)$ lauten nun

$$m\ddot{x}_S = 0$$
$$0 = N - mg$$
$$\Theta_S \ddot{\varphi} = 0$$

Daraus folgt für $t > T_0$

$$\dot{x}_S(t) = const = \frac{1}{3} r\omega_0 \qquad \dot{\varphi}(t) = const = \frac{1}{3}\omega_0$$

und

$$\boxed{x_S(t) = x_S(T_0) + \frac{1}{3} r\omega_0 (t - T_0) \qquad \varphi(t) = \varphi(T_0) + \frac{1}{3}\omega_0 (t - T_0)}\,.$$

Das Rad hatte zum Zeitpunkt $t = 0$ die kinetische Energie

$$\left(E_{kin}\right)_{t=0} = \frac{1}{2}\Theta_S {\omega_0}^2 = \frac{1}{4} mr^2 {\omega_0}^2$$

und zum Zeitpunkt $t = T_0$ die geringere kinetische Energie

$$\left(E_{kin}\right)_{t=T_0} = \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{3} r\omega_0\right)^2 + \frac{1}{2}\Theta_S \left(\frac{1}{3}\omega_0\right)^2 = \frac{1}{12} mr^2 {\omega_0}^2$$

Die momentane Leistung der Gleitreibungskraft

$$P_R = \vec{v}_B \circ \vec{F}_R = \left(\dot{x}_S - r\dot{\varphi}\right)\vec{e}_x \circ \mu N\,\vec{e}_x = \left(\dot{x}_S - r\dot{\varphi}\right)\mu mg$$

$$\boxed{P_R = \left(3\mu g t - r\omega_0\right)\mu mg}$$

integriert über das Zeitintervall $0 \le t \le T_0$ liefert die Arbeit der Gleitreibungskraft

$$W = \int_0^{T_0} \left(3\mu g t - r\omega_0\right)\mu m g\, dt = \mu m g\left(\frac{3}{2}\mu g {T_0}^2 - r\omega_0 T_0\right)$$

$$W = \mu m g\left(\frac{3}{2}\mu g\left(\frac{r\omega_0}{3\mu g}\right)^2 - r\omega_0\left(\frac{r\omega_0}{3\mu g}\right)\right)$$

$$\boxed{W = -\frac{1}{6} m r^2 {\omega_0}^2}$$

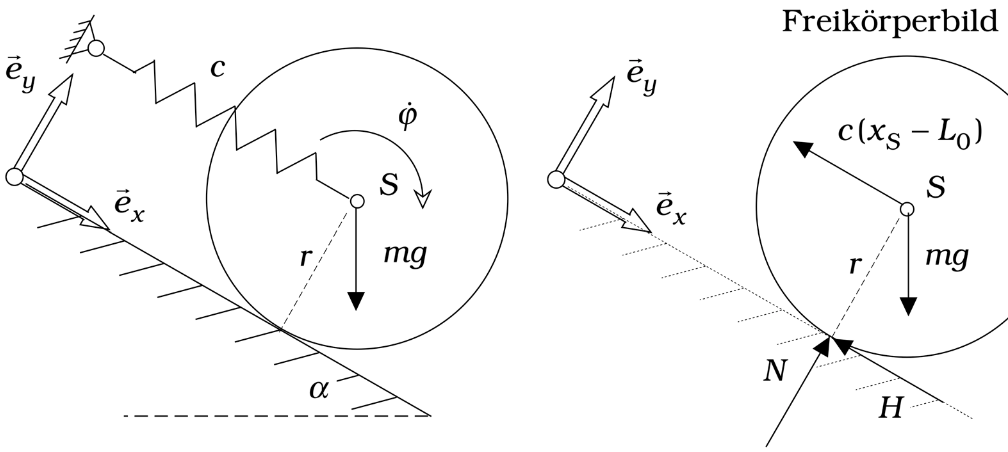
Die Abnahme der kinetischen Energie des Rades in der Gleitphase

$$\left(E_{kin}\right)_{t=T_0} - \left(E_{kin}\right)_{t=0} = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4}\right) m r^2 {\omega_0}^2 = -\frac{1}{6} m r^2 {\omega_0}^2$$

ist also gleich der Arbeit der Reibungskraft. Das ist die Aussage des Arbeitssatzes der Mechanik.

✎ ———————————

Als nächstes soll die schwingende Rollbewegung eines Rades auf einer schiefen Ebene untersucht werden.



Mit Hilfe des Freikörperbildes kann man den Schwerpunkt- und den Momentensatz formulieren:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_S &= mg\sin(\alpha) - c\,(x_S - L_0) - H \\ m\ddot{y}_S &= -mg\cos(\alpha) + N \\ \Theta_S\ddot{\varphi} &= Hr \end{aligned}$$

Dabei sind $N\vec{e}_y$ und $-H\vec{e}_x$ noch unbekannte Reaktionskräfte, die dafür verantwortlich sind, dass der Kontaktpunkt des rollenden Rades mit der schiefen Ebene momentan keine Geschwindigkeit hat, also sein Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}_S + \left(-r\,\vec{e}_y\right)\times\left(-\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\right) = \vec{0} \qquad \text{(Rollbedingung)}$$

wird. Außerdem gilt für den Schwerpunkt des Rades

$$\vec{r}_S(t) = x_S(t)\,\vec{e}_x + r\,\vec{e}_y \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\ddot{y}_S \equiv 0}\,.$$

Aus der Rollbedingung folgt

$$\dot{x}_S\vec{e}_x - r\dot{\varphi}\,\vec{e}_x = \vec{0} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\ddot{x}_S = r\ddot{\varphi}}$$

Mit diesen kinematischen Beziehungen lauten die drei Gleichungen des Schwerpunkt- und des Momentensatzes

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_S &= mg\sin(\alpha) - c\,(x_S - L_0) - H \\ 0 &= -mg\cos(\alpha) + N \\ \Theta_S\,\frac{\ddot{x}_S}{r^2} &= H \end{aligned}$$

Aus der ersten und der dritten Gleichung ergibt sich die Differentialgleichung für die Schwerpunktkoordinate x_S

$$\left(m + \frac{\Theta_S}{r^2}\right)\ddot{x}_S = mg\sin(\alpha) - c\,(x_S - L_0)$$

und aus der zweiten Gleichung erhält man die erforderliche Reaktionskraft

$$\boxed{N = mg\cos(\alpha)}$$

Die Differentialgleichung für x_S

$$\ddot{x}_S + \frac{c}{\left(m + \frac{\Theta_S}{r^2}\right)}x_S = \frac{c}{\left(m + \frac{\Theta_S}{r^2}\right)}\frac{mg\sin(\alpha)}{c} + \frac{c}{\left(m + \frac{\Theta_S}{r^2}\right)}L_0$$

kann man mit den Abkürzungen

$$\boxed{{\omega_0}^2 := \frac{c}{\left(m + \frac{\Theta_S}{r^2}\right)} \qquad \frac{mg\sin(\alpha)}{c} + L_0 =: L}$$

einfacher schreiben:

$$\boxed{\ddot{x}_S + {\omega_0}^2 x_S = {\omega_0}^2 L}$$

Die beiden freien Konstanten C_1 und C_2 in der allgemeinen Lösung dieser Differentialgleichung

$$x_S(t) = L + C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)$$

werden gebraucht für die Anpassung an die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$x_S(t = 0) = x_0 \qquad \dot{x}_S(t = 0) = v_0$$

$$\boxed{x_S(t) = L + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \left(x_0 - L\right) \cos(\omega_0 t)}$$

Außerdem gilt

$$\boxed{y_S(t) = r \qquad \varphi(t) = \frac{x_S(t)}{r}}$$

Die veränderliche Reaktionskraft in der schiefen Ebene

$$H = \frac{\Theta_S}{r^2} \ddot{x}_S = \frac{\Theta_S}{r^2} {\omega_0}^2 \left(L - x_S\right)$$

ist die durch die Rauigkeit der Kontaktflächen des Rades und der schiefen Ebene ermöglichte **Haftreibungskraft**, die aber nicht beliebig groß werden kann, denn es gilt

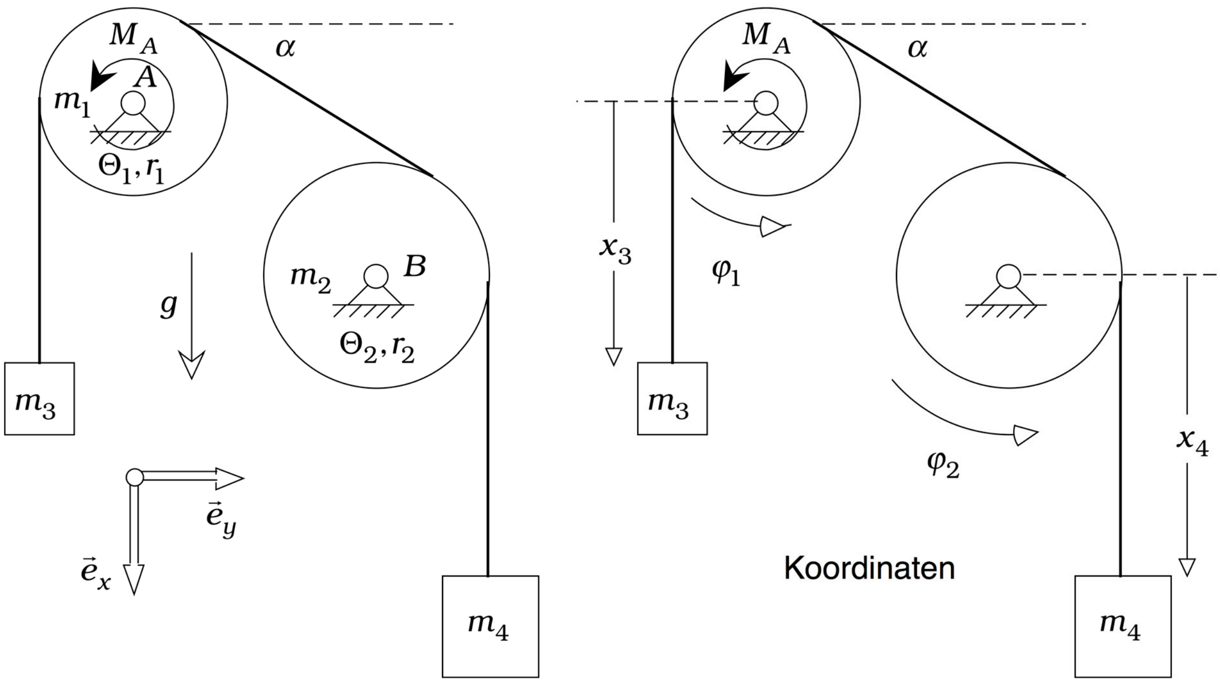
$$\left|H\right| \le \mu_0 N$$

wobei μ_0 der **Haftreibungskoeffizient** ist, der von der Oberflächenqualität der Kontaktflächen abhängt. Die angenommene Rollbewegung des Rades auf der schiefen Ebene ist also nur möglich, wenn die Bedingung

$$\boxed{\left|L - x_S\right| \le \mu_0 \frac{mgr^2 \cos(\alpha)}{\Theta_S {\omega_0}^2}}$$

erfüllt ist.

✎



Eine im Punkt A drehbar gelagerte Seilrolle (Radius r_1, Masse m_1, Trägheitsmoment um die Achse Θ_1) wird mit einem Drehmoment $M_A(t)$ angetrieben. Von der Rolle wird ein Seil bewegt, das über eine zweite, in B drehbar gelagerte Rolle (Radius r_2, Masse m_2, Trägheitsmoment um die Achse Θ_2) gelegt ist und an den beiden Enden mit Lasten (Masse m_3, Masse m_4) verbunden ist. Das Seil wird näherungsweise als masselos angenommen; es soll auf den Rollen nicht rutschen. Wie bewegen sich die Massen und welche Kräfte entstehen in den Lagern und im Seil?

Zur Beschreibung der Konfiguration des Verbandes starrer Körper sind acht Koordinaten erforderlich:

$$x_A, y_A, \varphi_1, x_B, y_B, \varphi_2, x_3, x_4$$

Die kinematischen Zwangsbedingungen:

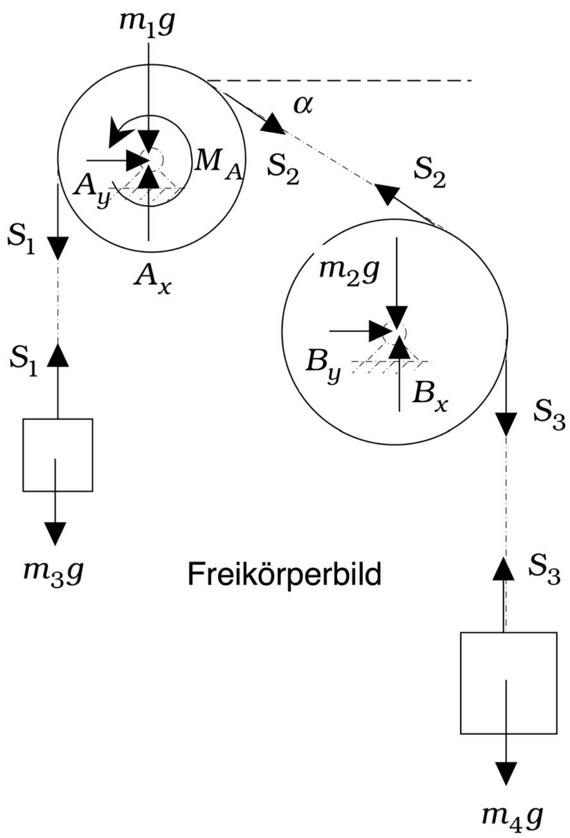
$$\dot{x}_A \equiv 0, \quad \dot{y}_A \equiv 0, \quad \dot{x}_B \equiv 0, \quad \dot{y}_B \equiv 0$$

$$r_1\dot{\varphi}_1 = \dot{x}_3 \qquad r_2\dot{\varphi}_2 = r_1\dot{\varphi}_1 \qquad r_2\dot{\varphi}_2 = -\dot{x}_4$$

reduzieren die Kinematik des Systems auf nur einen Freiheitsgrad. Wird x_3 als frei Koordinate gewählt, so gilt

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \dot{x}_A \equiv 0, \quad \dot{y}_A \equiv 0, & \dot{x}_B \equiv 0, & \dot{y}_B \equiv 0 \\ \dot{\varphi}_1 = \dfrac{1}{r_1}\dot{x}_3, & \dot{\varphi}_2 = \dfrac{1}{r_2}\dot{x}_3, & \dot{x}_4 = -\dot{x}_3 \end{array}}$$

Die $(3+3+1+1)=8$ Bewegungsgleichungen der Teilkörper werden mit Hilfe des Freikörperbildes – zunächst ohne Rücksicht auf die Zwangsbedingungen – aufgestellt.



$$m_1\ddot{x}_A = m_1g - A_x + S_1 + S_2\sin(\alpha) \qquad m_2\ddot{x}_B = m_2g - B_x - S_2\sin(\alpha) + S_3$$
$$m_1\ddot{y}_A = A_y + S_2\cos(\alpha) \qquad m_2\ddot{y}_B = B_y - S_2\cos(\alpha)$$
$$\Theta_1\ddot{\varphi}_1 = M_A(t) + S_1r_1 - S_2r_1 \qquad \Theta_2\ddot{\varphi}_2 = S_2r_2 - S_3r_2$$

$$m_3\ddot{x}_3 = m_3g - S_1 \qquad m_4\ddot{x}_4 = m_4g - S_3$$

Mit den kinematischen Zwangsbedingungen wird daraus

$$0 = m_1g - A_x + S_1 + S_2\sin(\alpha) \qquad 0 = m_2g - B_x - S_2\sin(\alpha) + S_3$$
$$0 = A_y + S_2\cos(\alpha) \qquad 0 = B_y - S_2\cos(\alpha)$$
$$\Theta_1\frac{1}{r_1}\ddot{x}_3 = M_A(t) + S_1r_1 - S_2r_1 \qquad \Theta_2\frac{1}{r_2}\ddot{x}_3 = S_2r_2 - S_3r_2$$

$$m_3\ddot{x}_3 = m_3g - S_1 \qquad -m_4\ddot{x}_3 = m_4g - S_3$$

In den vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
\Theta_1 \frac{1}{r_1^{\,2}} \ddot{x}_3 &= \frac{M_A(t)}{r_1} + S_1 - S_2 \\
\Theta_2 \frac{1}{r_2^{\,2}} \ddot{x}_3 &= S_2 - S_3 \\
m_3 \ddot{x}_3 &= m_3 g - S_1 \\
m_4 \ddot{x}_3 &= -m_4 g + S_3
\end{aligned}$$

kann man durch Addition die Seilkräfte eliminieren und erhält die Bewegungsgleichung des Systems:

$$\boxed{\ddot{x}_3 = f(t), \qquad f(t) := \frac{\dfrac{M_A(t)}{r_1} + m_3 g - m_4 g}{\Theta_1 \dfrac{1}{r_1^{\,2}} + \Theta_2 \dfrac{1}{r_2^{\,2}} + m_3 + m_4}}$$

Anschließend werden die Reaktionskräfte (Seilkräfte und Lagerkräfte) berechnet.

$$S_1 = m_3 \left(g - f(t)\right)$$

$$S_3 = m_4 \left(g + f(t)\right)$$

$$S_2 = m_4 g + \left(m_4 + \Theta_2 \frac{1}{r_2^{\,2}} \right) f(t)$$

$$A_y = -S_2 \cos(\alpha) \qquad B_y = S_2 \cos(\alpha)$$

$$A_x = m_1 g + S_1 + S_2 \sin(\alpha) \qquad B_x = m_2 g + S_3 - S_2 \sin(\alpha)$$

✎ ______________________________