Physikalische Anwendungen – Kinematik

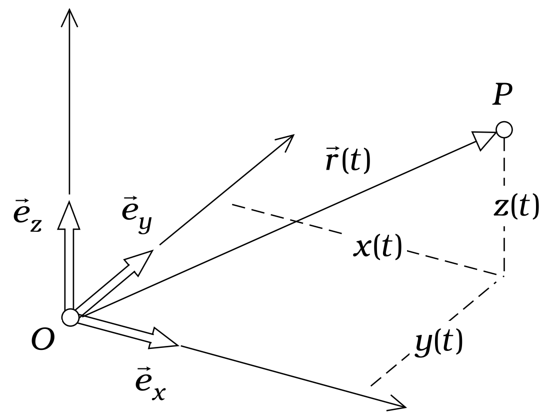
Zum Mathematik-Lehrbuch „Notwendig und zunächst hinreichend“ (Shaker Verlag, Aachen) gibt es mehrere PDF-Dokumente mit ergänzenden Beispielen und Aufgaben, die die Anwendung der mathematischen Grundlagen in ingenieurrelevanten Bereichen zeigen.

Im vorliegenden Dokument finden Sie eine Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus dem Bereich der Kinematik:

Punktkinematik (Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor, Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung) – Uhrenzeiger – Starrkörperbewegung, Eulersche Formel – Rollendes Rad – Winkelrahmen mit Rädern – Relativkinematik (Relativgeschwindigkeit und -beschleunigung, Führungsgeschwindigkeit und -beschleunigung, Coriolisbeschleunigung) – Relativbewegung auf rotierender Kreisscheibe

© 2010 S. Kessel, D. Fröhling

v1.0



Ein Punkt P, der sich durch den dreidimensionalen Raum bewegt, hat im raumfesten kartesischen xyz-Koordinatensystem den zeitabhängigen **Ortsvektor**

$$\overrightarrow{OP}(t) = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z \,.$$

Die Zeitableitung dieses Vektors ist der **Geschwindigkeitsvektor**

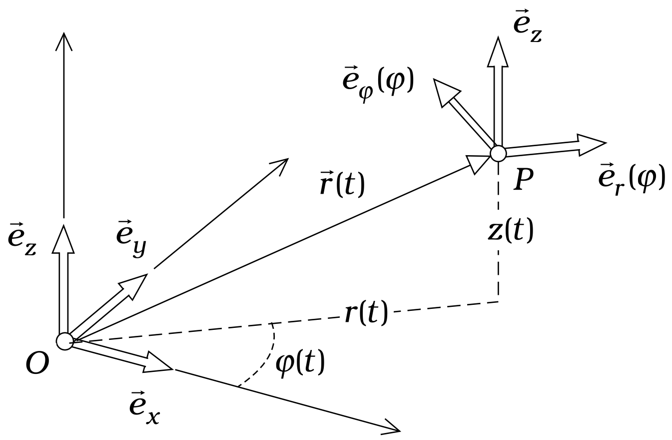
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\,\overrightarrow{OP}(t)}{dt} = \frac{d\,x(t)}{dt}\,\vec{e}_x + \frac{d\,y(t)}{dt}\,\vec{e}_y + \frac{d\,z(t)}{dt}\,\vec{e}_z \\ v(t) &= \dot{\overrightarrow{OP}}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{e}_x + \dot{y}(t)\,\vec{e}_y + \dot{z}(t)\,\vec{e}_z \end{aligned}}$$

und die Zeitableitung des Geschwindigkeitsvektors ist der **Beschleunigungsvektor** des Punktes P:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OP}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\,\vec{e}_x + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\,\vec{e}_y + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\,\vec{e}_z \\ \vec{a}(t) &= \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\overrightarrow{OP}}(t) = \ddot{x}(t)\,\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\,\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\,\vec{e}_z \end{aligned}}$$

Verwendet man zur Beschreibung der Lage eines Punktes P Zylinderkoordinaten r, φ, z mit den ortsabhängigen Basisvektoren

$$\begin{aligned} \vec{e}_r(\varphi) &= \cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\varphi)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi(\varphi) &= -\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \cos(\varphi)\,\vec{e}_y \end{aligned}$$



und den Eigenschaften

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_r(\varphi)}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi(\varphi), \qquad \frac{d\vec{e}_\varphi(\varphi)}{d\varphi} = -\vec{e}_r(\varphi),}$$

so gilt, wenn φ eine Funktion der Zeit t ist:

$$\frac{d\vec{e}_r(\varphi(t))}{dt} = \frac{d\vec{e}_r(\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi(t)}{dt} = \dot{\varphi}(t)\vec{e}_\varphi(\varphi(t))$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi(\varphi(t))}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi(\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\dot{\varphi}(t)\vec{e}_r(\varphi(t))$$

in Kurzform:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\vec{e}}_r &= \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r\end{aligned}}$$

Mit dem Ortsvektor

$$\overrightarrow{OP}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(\varphi(t)) + z(t)\,\vec{e}_z$$

erhält man dann den Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\,\vec{e}_r(\varphi(t)) + r(t)\dot{\varphi}(t)\,\vec{e}_\varphi(\varphi(t)) + \dot{z}(t)\,\vec{e}_z$$

oder übersichtlicher formuliert, indem man den ständigen Hinweis auf die Zeitabhängigkeit der Koordinaten weglässt:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{e}_z}\,.$$

Der Beschleunigungsvektor lautet in Zylinderkoordinaten.

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \left(\ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r\right) + \left(\dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi\right) + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right) + \left(\dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\cdot\left(-\dot{\varphi}\,\vec{e}_r\right)\right) + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{e}_z}$$

Bewegt sich der Punkt P auf einem Kreis mit dem Radius $r = R = const$ in einer Ebene $z = H = const$ um die z-Achse, so gilt

$$\overrightarrow{OP}(t) = R\,\vec{e}_r(\varphi(t)) + H\,\vec{e}_z$$

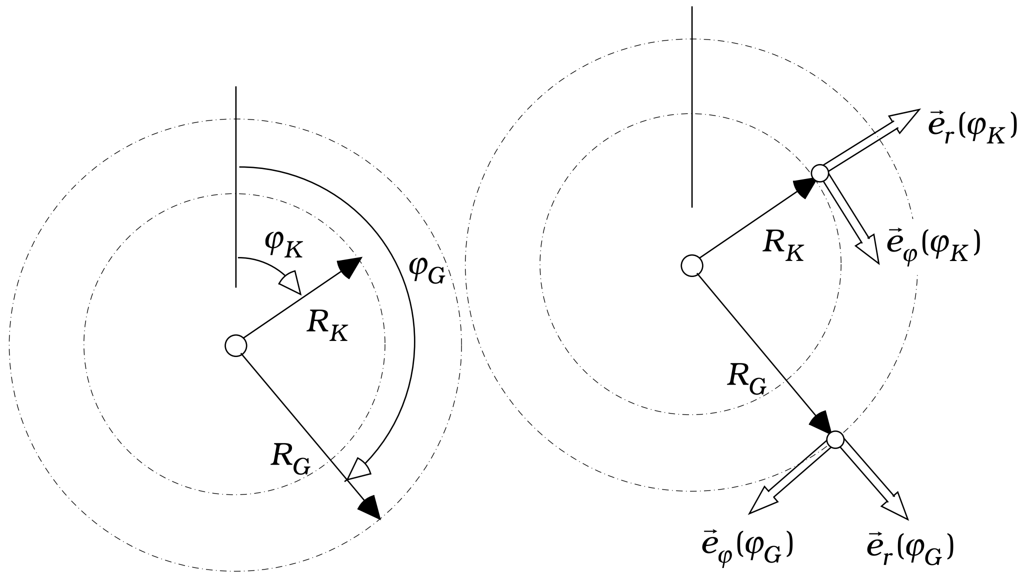
$$\dot{r} \equiv 0, \quad \ddot{r} \equiv 0, \quad \dot{z} \equiv 0, \quad \ddot{z} \equiv 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v} &= R\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{a} &= -R\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_r + R\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \end{aligned}}$$

Für diese Kreisbewegung sind also die Zylinderkoordinaten optimal.

Man nennt $\dot{\varphi}$ **Winkelgeschwindigkeit** und $\dot{\varphi}$ **Winkelbeschleunigung**.

Die Spitzen der beiden Zeiger einer Uhr bewegen sich auf konzentrischen Kreisen.



Die Stellungen der beiden Zeiger einer Uhr kann man mit den Winkeln φ_G und φ_K beschreiben. Die zeitlichen Änderungen dieser Winkel sind jeweils konstant. Es gilt für den großen Zeiger, der in einer Stunde einen Winkel von $360° = 2\pi$ durchläuft

$$\dot{\varphi}_G = \frac{360°}{\text{Stunde}} = \frac{360 \cdot \frac{\pi}{180}}{\text{Stunde}} = \frac{2\pi}{\text{Stunde}}$$

und für den kleinen Zeiger, der nur den Winkel $30° = 2\pi/12$ überstreicht

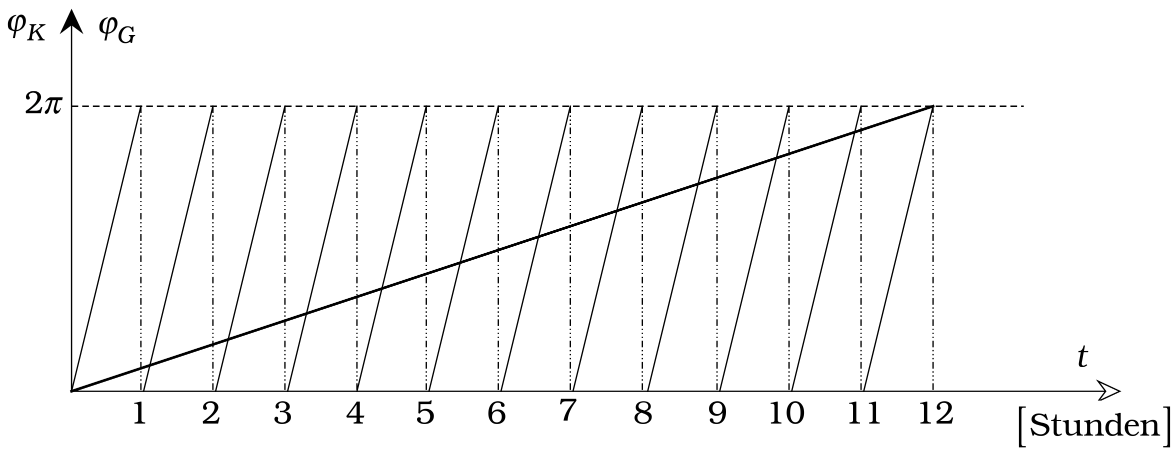
$$\dot{\varphi}_K = \frac{30°}{\text{Stunde}} = \frac{30 \cdot \dfrac{\pi}{180}}{\text{Stunde}} = \frac{(\pi/6)}{\text{Stunde}}$$

Sind zum Zeitpunkt $t = 0$ beide Winkel null, so sind sie zum Zeitpunkt $t > 0$

$$\varphi_G(t) = \dot{\varphi}_G\, t, \qquad \varphi_K(t) = \dot{\varphi}_K\, t.$$

Lässt man die Winkelzählung für den großen Zeiger nach einer Stunde wieder bei null beginnen, so gilt:

$$\varphi_G(t) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\text{Stunde}}t & \text{für} \quad 0 \text{ Stunden} \le t < 1 \text{ Stunde} \\ \dfrac{2\pi}{\text{Stunde}}t - 1 \cdot 2\pi & \text{für} \quad 1 \text{ Stunde} \le t < 2 \text{ Stunden} \\ \dfrac{2\pi}{\text{Stunde}}t - 2 \cdot 2\pi & \text{für} \quad 2 \text{ Stunden} \le t < 3 \text{ Stunden} \\ & u.s.w. \end{cases}$$



Die Zeitpunkte $t = T_ü$, zu denen der große Zeiger den langsameren kleinen überholt, ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\frac{(\pi/6)}{\text{Stunde}} T_{ü(1)} = \frac{2\pi}{\text{Stunde}} T_{ü(1)} - 2\pi \quad \rightarrow \quad T_{ü(1)} = \frac{2\pi}{2\pi - \dfrac{\pi}{6}} \text{Stunden} = \frac{12}{11} \text{Stunden}$$

$$\frac{(\pi/6)}{\text{Stunde}} T_{ü(2)} = \frac{2\pi}{\text{Stunde}} T_{ü(2)} - 4\pi \quad \rightarrow \quad T_{ü(2)} = \frac{4\pi}{2\pi - \dfrac{\pi}{6}} \text{Stunden} = \frac{24}{11} \text{Stunden}$$

$$\frac{(\pi/6)}{\text{Stunde}} T_{ü(3)} = \frac{2\pi}{\text{Stunde}} T_{ü(3)} - 6\pi \quad \rightarrow \quad T_{ü(3)} = \frac{6\pi}{2\pi - \dfrac{\pi}{6}} \text{Stunden} = \frac{36}{11} \text{Stunden}$$

Zu den Zeigerspitzen gehören die Geschwindigkeitsvektoren

$$\vec{v}_K = R_K \dot{\varphi}_K \vec{e}_\varphi(\varphi_K), \qquad \vec{v}_G = R_G \dot{\varphi}_G \vec{e}_\varphi(\varphi_G),$$

und die Beschleunigungsvektoren

$$\vec{a}_K = -R_K \left(\dot{\varphi}_K\right)^2 \vec{e}_r(\varphi_K), \qquad \vec{a}_G = -R_G \left(\dot{\varphi}_G\right)^2 \vec{e}_r(\varphi_G),$$

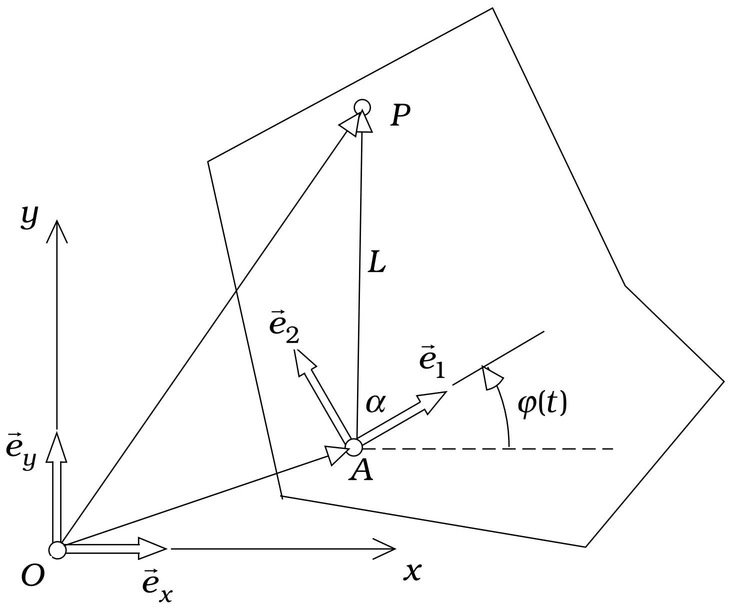
✎ ________________________________

Ein starrer Körper ist das **mathematische Idealmodell** für einen materiellen Körper, der sich nur unter intensivem Kraftaufwand deformieren lässt. Die Bewegungsmöglichkeiten eines starren Körpers sind durch die Bedingung, dass sich die Abstände zwischen materiellen Punkten des Körpers definitionsgemäß nicht verändern, stark eingeschränkt.

Will man die Bewegung einer starren Scheibe in der raumfesten xy-Ebene beschreiben, so ist neben der raumfesten Basis eine körperfeste Basis erforderlich:

$$\text{raumfest:} \left\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right\}$$

$$\text{mit dem starren Körper fest verbunden: } \left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \left(\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_z\right)\right\}$$



$$\vec{e}_1 = \vec{e}_1(\varphi(t)) = \cos(\varphi(t))\,\vec{e}_x + \sin(\varphi(t))\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_2(\varphi(t)) = -\sin(\varphi(t))\,\vec{e}_x + \cos(\varphi(t))\,\vec{e}_y$$

Für diese körperfesten Basisvektoren gilt

$$\dot{\vec{e}}_1 = \frac{d\vec{e}_1}{d\varphi}\dot{\varphi} = \vec{e}_2\,\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \qquad \dot{\vec{e}}_2 = \frac{d\vec{e}_2}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\vec{e}_1\,\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times \vec{e}_2$$

Mit dem **Winkelgeschwindigkeitsvektor** der starren körperfesten Basis, also auch des Körpers bei der ebenen Bewegung

$$\boxed{\vec{\omega} := \dot{\varphi}\,\vec{e}_3}$$

erhält man die Schlüsselformel der Starrkörperbewegung:

$$\boxed{\dot{\vec{e}}_1 = \vec{\omega} \times \vec{e}_1 \qquad \dot{\vec{e}}_2 = \vec{\omega} \times \vec{e}_2}$$

Ausgehend vom Ortsvektor eines Körperpunktes P

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \left(x_A(t)\,\vec{e}_x + y_A(t)\,\vec{e}_y\right) + \left(L\cos(\alpha)\,\vec{e}_1(\varphi(t)) + L\sin(\alpha)\,\vec{e}_2(\varphi(t))\right)$$

erhält man den Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}_P = \dot{\overrightarrow{OP}}$$

$$\vec{v}_P = \underbrace{\left(\dot{x}_A\vec{e}_x + \dot{y}_A\vec{e}_y\right)}_{\vec{v}_A} + \underbrace{\left(L\cos(\alpha)\,\vec{\omega}\times\vec{e}_1 + L\sin(\alpha)\,\vec{\omega}\times\vec{e}_2\right)}_{\vec{\omega}\times\overrightarrow{AP}}$$

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}}$$

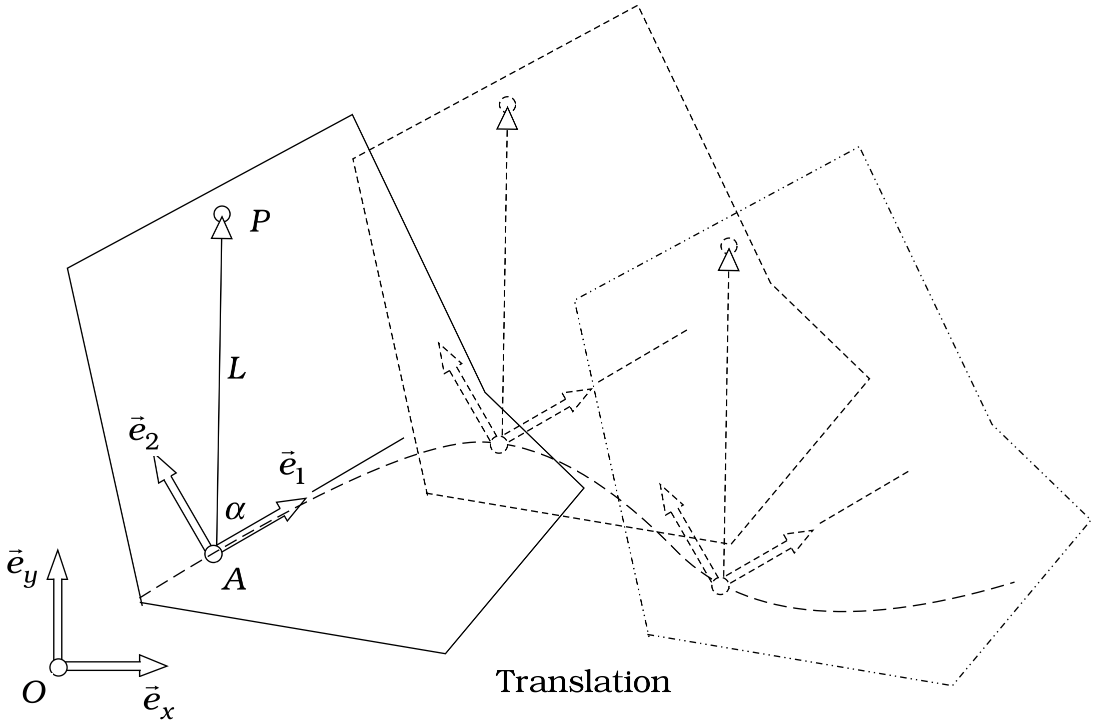
Diese **EULERsche Formel** der Kinematik starrer Körper gilt auch bei beliebiger dreidimensionaler Bewegung des Körpers, bei der jedoch der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ komplizierter aufgebaut ist, denn für die Beschreibung der dreidimensionalen Drehung sind drei Winkel erforderlich.

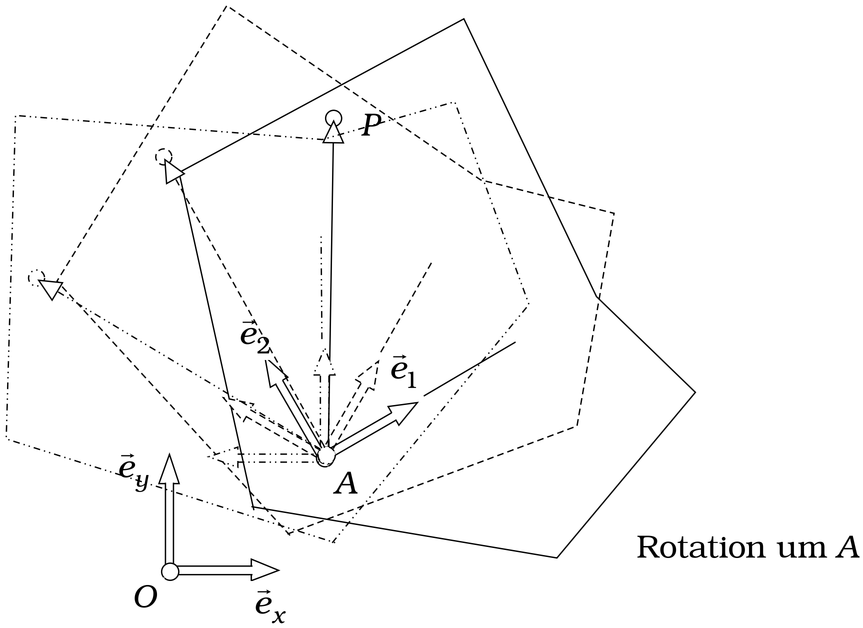
Im allgemeinen hat bei der starren Bewegung jeder Körperpunkt einen speziellen Geschwindigkeitsvektor; deshalb spricht man auch vom Geschwindigkeits**vektorfeld** des starren Körpers, das durch die EULERsche Formel beschrieben wird. Sonderfälle sind die **Translationsbewegung**

$$\vec{\omega} \equiv \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_P = \vec{v}_A \quad \text{für alle Körperpunkte}$$

und die **Rotationsbewegung** des starren Körpers **um einen raum- und körperfesten Punkt *A***

$$\vec{v}_A \equiv \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}$$





Weil

$$\dot{\overrightarrow{AP}} = L\cos(\alpha)\,\dot{\vec{e}}_1 + L\sin(\alpha)\,\dot{\vec{e}}_2 = \vec{\omega}\times\overrightarrow{AP}$$

ist, erhält man für den Beschleunigungsvektor des Punktes P:

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P = \dot{\vec{v}}_A + \dot{\vec{\omega}}\times\overrightarrow{AP} + \vec{\omega}\times\dot{\overrightarrow{AP}} = \dot{\vec{v}}_A + \dot{\vec{\omega}}\times\overrightarrow{AP} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overrightarrow{AP})$$

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}\times\overrightarrow{AP} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overrightarrow{AP})}$$

Weil bei der **ebenen** Bewegung

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \qquad \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi}\,\vec{e}_3$$

und

$$\vec{e}_3 \times \left(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1\right) = \vec{e}_3 \times \left(\vec{e}_2\right) = -\vec{e}_1 \qquad \vec{e}_3 \times \left(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2\right) = \vec{e}_3 \times \left(-\vec{e}_1\right) = -\vec{e}_2$$

ist, wird

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}) = \dot{\varphi}^2\,\vec{e}_3 \times (\vec{e}_3 \times \overrightarrow{AP}) = -\dot{\varphi}^2\,\overrightarrow{AP}$$

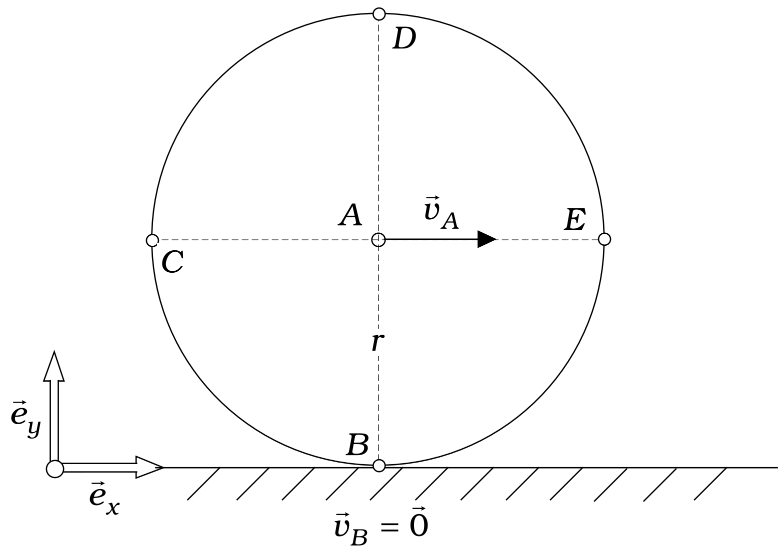
$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_A + \ddot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times \overrightarrow{AP} - \dot{\varphi}^2\,\overrightarrow{AP}}$$

Das ist die Formel für das **Beschleunigungsvektorfeld** des starren Körpers **bei ebener Bewegung**.

✎ ______________________

Bei einem **rollenden** Rad hat der Kontaktpunkt B mit der Rollbahn momentan die Geschwindigkeit $\vec{v}_B = \vec{0}$ (Man denke an den Abdruck eines Reifenprofils in einem weichen Boden; wenn der Kontaktpunkt eine Geschwindigkeit hätte, wäre kein Profil zu erkennen).

Der Mittelpunkt A des Rades hat die Geschwindigkeit $\vec{v}_A = v_A \vec{e}_x$.



Mit der EULERschen Formel für das momentane Geschwindigkeitsvektorfeld eines starren Körpers, die auch in einer raumfesten Basis ausgewertet werden kann, gilt

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} = v_A \vec{e}_x + \omega\, \vec{e}_z \times \left(-r\, \vec{e}_y\right) = \left(v_A + r\omega\right) \vec{e}_x = \vec{0}$$

Daraus folgt für die momentane Winkelgeschwindigkeit des Rades

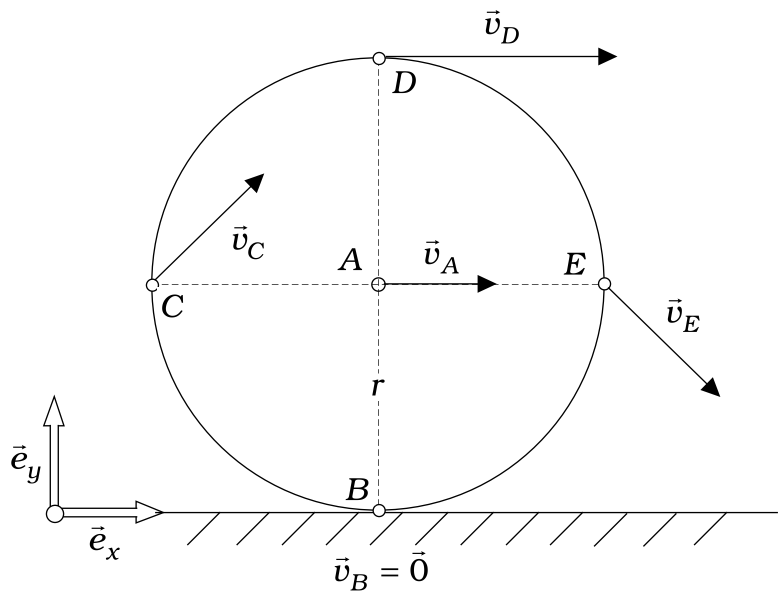
$$\omega = -\frac{v_A}{r} \qquad \vec{\omega} = -\frac{v_A}{r}\vec{e}_z$$

Nun können die momentanen Geschwindigkeitsvektoren aller Punkte des Rades berechnet werden und für die Randpunkte C, D und E gilt

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AC} = v_A \vec{e}_x + \left(-\frac{v_A}{r}\vec{e}_z\right) \times \left(-r\, \vec{e}_x\right) = v_A \vec{e}_x + v_A \vec{e}_y$$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AD} = v_A \vec{e}_x + \left(-\frac{v_A}{r}\vec{e}_z\right) \times \left(r\, \vec{e}_y\right) = 2 v_A \vec{e}_x$$

$$\vec{v}_E = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AE} = v_A \vec{e}_x + \left(-\frac{v_A}{r}\vec{e}_z\right) \times \left(r\, \vec{e}_x\right) = v_A \vec{e}_x - v_A \vec{e}_y$$



Wenn das Rad mit konstanter Geschwindigkeit v_A rollt, ist auch die Winkelgeschwindigkeit ω konstant. In der Formel für das Beschleunigungsvektorfeld eines starren Körpers bei ebener Bewegung

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \dot{\omega}\, \vec{e}_3 \times \overrightarrow{AP} - \omega^2 \overrightarrow{AP}$$

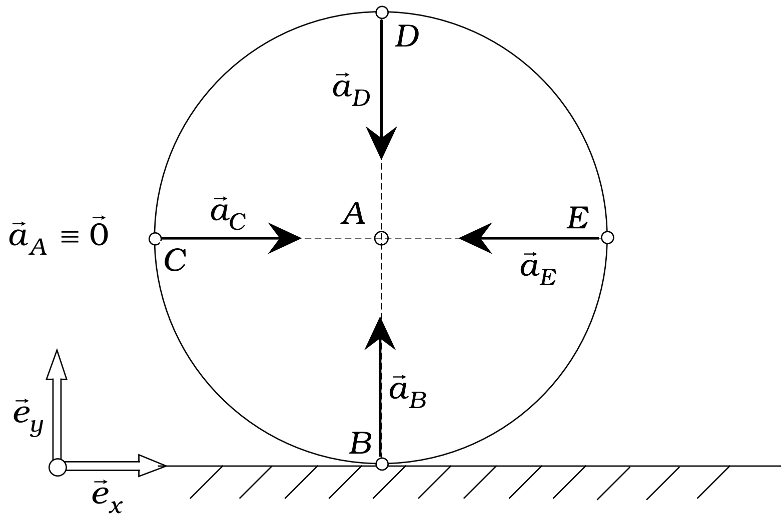
ist dann

$$\vec{a}_A \equiv \vec{0} \qquad \dot{\omega} \equiv 0$$

Dem entsprechend gilt

$$\vec{a}_B = -\omega^2 \left(-r\,\vec{e}_y\right) = \frac{v_A^{\,2}}{r}\,\vec{e}_y \qquad \vec{a}_C = -\omega^2 \left(-r\,\vec{e}_x\right) = \frac{v_A^{\,2}}{r}\,\vec{e}_x$$

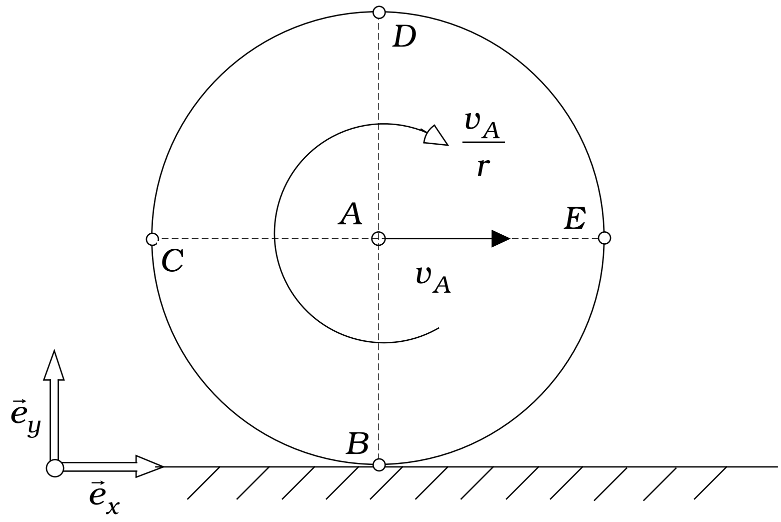
$$\vec{a}_D = -\omega^2 \left(r\,\vec{e}_y\right) = -\frac{v_A^{\,2}}{r}\,\vec{e}_y \qquad \vec{a}_E = -\omega^2 \left(r\,\vec{e}_x\right) = -\frac{v_A^{\,2}}{r}\,\vec{e}_x$$



Der momentane Geschwindigkeitszustand des Rades ist darstellbar als Überlagerung der Translationsbewegung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_A$ und der Rotationsbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = -\frac{v_A}{r}\,\vec{e}_z$$

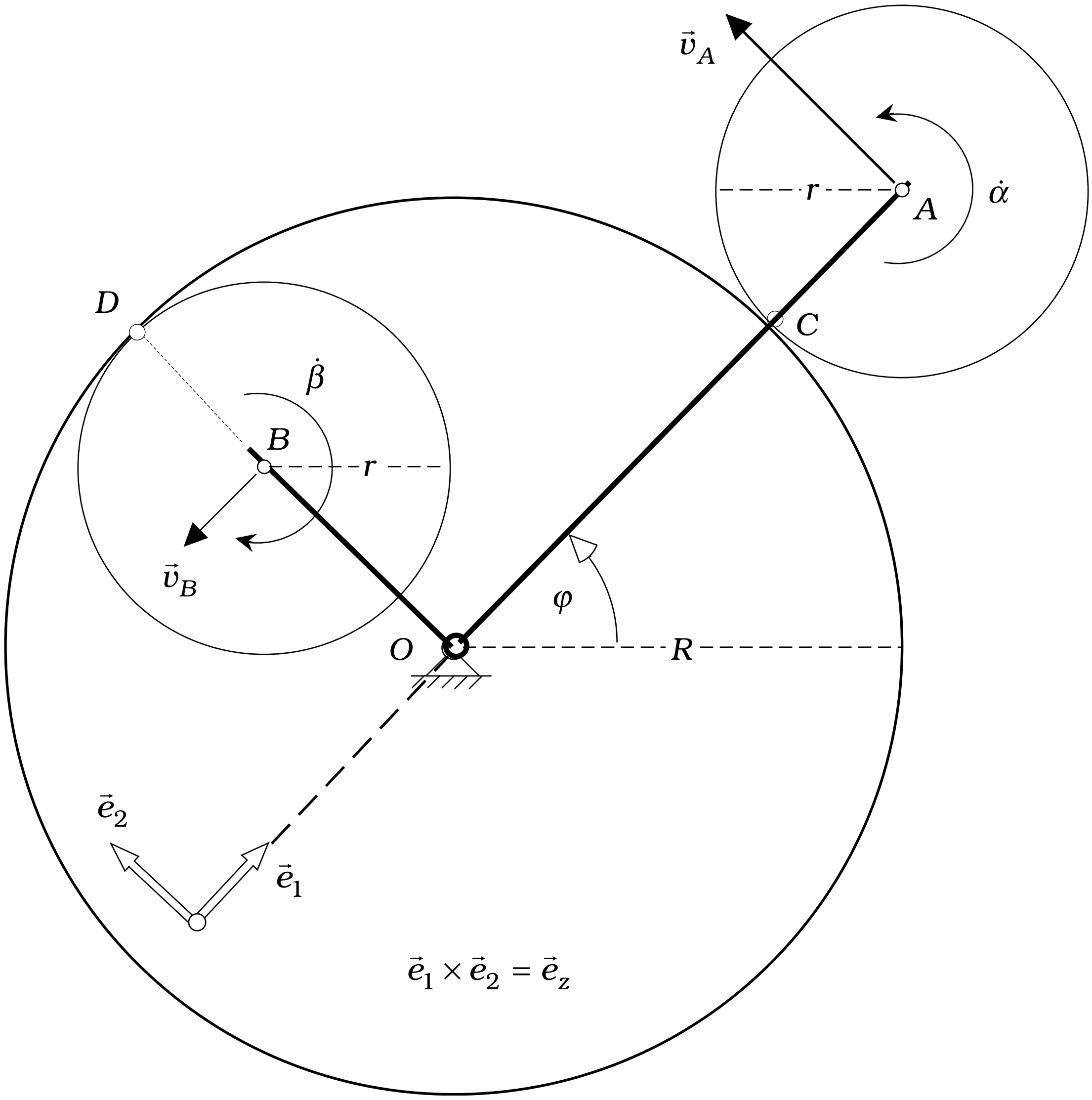
im Uhrzeigersinn um den Radmittelpunkt.



$\vec{v}_A = v_A \vec{e}_x$ $\qquad \vec{\omega} = -\frac{v_A}{r}\vec{e}_z$ $\qquad \vec{e}_z = \vec{e}_x \times \vec{e}_y$

✎ ________________________________

Wenn ein starrer Winkelrahmen, der sich um einen raumfesten Punkt O mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ dreht und in den Punkten A und B Räder mit dem Radius r führt, die jeweils auf einer Kreisbahn mit dem Radius $R > r$ abrollen, so sind die Winkelgeschwindigkeiten dieser Räder Funktionen von $\dot{\varphi}$.



Mit den Geschwindigkeitsvektoren der Radmittelpunkte

$$\vec{v}_A = (R + r)\dot{\varphi}\,\vec{e}_2 \qquad \vec{v}_B = -(R - r)\dot{\varphi}\,\vec{e}_1$$

und den Winkelgeschwindigkeitsvektoren der Räder

$$\vec{\omega}_{(A)} = \dot{\alpha}\,\vec{e}_z \qquad \vec{\omega}_{(B)} = -\dot{\beta}\,\vec{e}_z$$

ergeben sich für die Kontaktpunkte der Räder mit der kreisförmigen Abrollbahn die Geschwindigkeitsvektoren

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{(A)} \times \overrightarrow{AC} \qquad \vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{(B)} \times \overrightarrow{BD}$$

die beide die Rollbedingung

$$\vec{v}_C = \vec{0} \qquad \vec{v}_D = \vec{0}$$

erfüllen müssen

$$\vec{v}_A + \dot{\alpha}\,\vec{e}_z \times \left(-r\,\vec{e}_1\right) = \vec{0} \qquad \vec{v}_B + \left(-\dot{\beta}\,\vec{e}_z\right) \times \left(r\,\vec{e}_2\right) = \vec{0}$$

$$(R+r)\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_2 - r\dot{\alpha}\,\vec{e}_2 = \vec{0} \qquad -(R-r)\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_1 + r\,\dot{\beta}\,\vec{e}_1 = \vec{0}$$

Daraus folgt

$$\dot{\alpha} = \left(\frac{R}{r} + 1\right)\dot{\varphi} \qquad \dot{\beta} = \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\varphi}$$

Sind in der Stellung $\varphi = 0$ auch die Drehwinkel $\alpha = \beta = 0$ gesetzt, so gilt

$$\alpha(t) = \left(\frac{R}{r} + 1\right)\varphi(t) \qquad \beta(t) = \left(\frac{R}{r} - 1\right)\varphi(t)$$

✎ ______________________________

Nicht immer beobachtet man die Bewegung eines Punktes von einem ruhenden Bezugssystem aus. Sitzt der Beobachter auf einem Fahrzeug, das sich in der *xy*-Ebene in bekannter Weise bewegt, so sind die kinematischen Größen Geschwindigkeit und Beschleunigung eines unabhängig vom Fahrzeug in der *xy*-Ebene bewegten Punktes *P* für einen ruhenden und einen mit dem Fahrzeug bewegten Beobachter völlig verschieden. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes *P*, die der ruhende Beobachter registriert, wird „absolut" genannt und die vom bewegten Beobachter gesehenen „relativ". Die Bewegung des Beobachterfahrzeugs ist die als bekannt vorausgesetzte „Führungsbewegung".

Die Bewegung des Fahrzeugs in der *xy*-Ebene wird durch die Lage und Orientierung $\varphi(t)$ einer mit dem Fahrzeug fest verbundenen Basis $\left\{\vec{e}_1(t), \vec{e}_3(t), \vec{e}_3 = \vec{e}_z\right\}$ im Punkt *A* mit den absoluten Koordinaten $\left\{x_A(t), y_A(t), z_A = 0\right\}$ beschrieben.

$$\overrightarrow{OA} = x_A(t)\,\vec{e}_x + y_A(t)\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_1(t) = \cos(\varphi(t))\,\vec{e}_x + \sin(\varphi(t))\,\vec{e}_y \qquad \dot{\vec{e}}_1(t) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_2$$

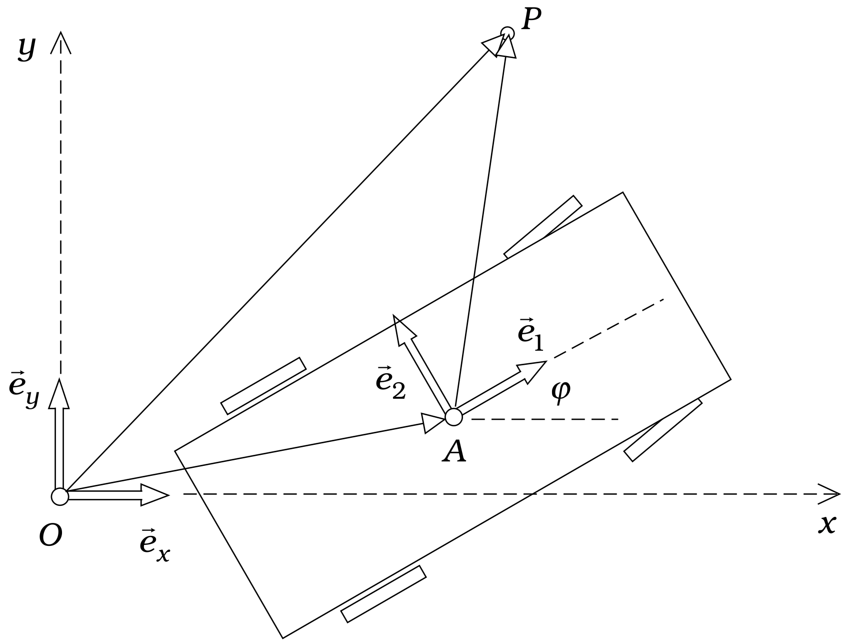
$$\vec{e}_2(t) = -\sin(\varphi(t))\,\vec{e}_x + \cos(\varphi(t))\,\vec{e}_y \qquad \dot{\vec{e}}_2(t) = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_1$$

Mit der **Führungswinkelgeschwindigkeit**

$$\boxed{\vec{\omega}_{Fü} := \dot{\varphi}\,\vec{e}_z}$$

kann geschrieben werden:

$$\boxed{\dot{\vec{e}}_1 = \vec{\omega}_{Fü} \times \vec{e}_1 \qquad \dot{\vec{e}}_2 = \vec{\omega}_{Fü} \times \vec{e}_2}$$



Wird die Bewegung eines Punktes P in der xy-Ebene von einem **raumfesten** Bezugssystem aus beschrieben, so erhält man aus dem Ortsvektor

$$\overrightarrow{OP}(t) = x_P(t)\,\vec{e}_x + y_P(t)\,\vec{e}_y$$

den **absoluten Geschwindigkeitsvektor**

$$\vec{v}_{P\,abs} := \dot{\overrightarrow{OP}} = \dot{x}_P\,\vec{e}_x + \dot{y}_P\,\vec{e}_y$$

und den **absoluten Beschleunigungsvektor**

$$\vec{a}_{P\,abs} := \ddot{\overrightarrow{OP}} = \ddot{x}_P\,\vec{e}_x + \ddot{y}_P\,\vec{e}_y$$

des Punktes P. Zum Punkt A des Fahrzeugs gehört der Ortsvektor

$$\overrightarrow{OA}(t) = x_A(t)\,\vec{e}_x + y_A(t)\,\vec{e}_y$$

und

$$\vec{v}_{A\,abs} := \dot{\overrightarrow{OA}} = \dot{x}_A\,\vec{e}_x + \dot{y}_A\,\vec{e}_y \qquad \vec{a}_{A\,abs} := \ddot{\overrightarrow{OA}} = \ddot{x}_A\,\vec{e}_x + \ddot{y}_A\,\vec{e}_y$$

sind die absoluten Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren des Punktes Fahrzeugpunktes A.

Ein Beobachter auf dem Fahrzeug verwendet „seine“ $\left\{\vec{e}_1(t), \vec{e}_3(t), \vec{e}_3 = \vec{e}_z\right\}$ -Basis zur Beschreibung der Lage des Punktes A, indem er den Vektor

$$\overrightarrow{AP}(t) = s_1(t)\,\vec{e}_1(t) + s_2(t)\,\vec{e}_2(t)$$

benutzt und die Basisvektoren als für ihn zeitlich unveränderlich behandelt. So entsteht für ihn der **Relativgeschwindigkeitsvektor**

$$\boxed{\vec{v}_{P\,rel} := \dot{s}_1\,\vec{e}_1 + \dot{s}_2\,\vec{e}_2}$$

und der **Relativbeschleunigungsvektor** des Punktes P

$$\boxed{\vec{a}_{P\,rel} := \ddot{s}_1\,\vec{e}_1 + \ddot{s}_2\,\vec{e}_2}$$

Die Beziehung zwischen den absoluten und den relativen kinematischen Begriffen ergibt sich, wenn man die Ortsvektordarstellung vollständig differenziert.

Ausgehend von

$$\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OA}(t) + \overrightarrow{AP}(t)$$

$$\left(x_P(t)\,\vec{e}_x + y_P(t)\,\vec{e}_y\right) = \left(x_A(t)\,\vec{e}_x + y_A(t)\,\vec{e}_y\right) + \left(s_1(t)\,\vec{e}_1(t) + s_2(t)\,\vec{e}_2(t)\right)$$

erhält man zunächst

$$\underbrace{\left(\dot{x}_P\,\vec{e}_x + \dot{y}_P\,\vec{e}_y\right)}_{\vec{v}_{P\,abs}} = \underbrace{\left(\dot{x}_A\,\vec{e}_x + \dot{y}_A\,\vec{e}_y\right)}_{\vec{v}_{A\,abs}} + \underbrace{\left(\dot{s}_1\,\vec{e}_1 + \dot{s}_2\,\vec{e}_2\right)}_{\vec{v}_{P\,rel}} + \left(s_1\,\dot{\vec{e}}_1 + s_2\,\dot{\vec{e}}_2\right)$$

und weil für die Basisvektoren im Fahrzeug

$$\dot{\vec{e}}_1 = \vec{\omega}_{Fü} \times \vec{e}_1 \qquad \dot{\vec{e}}_2 = \vec{\omega}_{Fü} \times \vec{e}_2$$

gilt, kann geschrieben werden

$$\vec{v}_{P\,abs} = \vec{v}_{A\,abs} + \vec{v}_{P\,rel} + \vec{\omega}_{Fü} \times \underbrace{\left(s_1\,\vec{e}_1 + s_2\,\vec{e}_2\right)}_{\overrightarrow{AP}}$$

$$\vec{v}_{P\,abs} = \underbrace{\vec{v}_{A\,abs} + \vec{\omega}_{Fü} \times \overrightarrow{AP}}_{\vec{v}_{P\,Fü}} + \vec{v}_{P\,rel}$$

$$\boxed{\vec{v}_{P\,Fü} := \vec{v}_{A\,abs} + \vec{\omega}_{Fü} \times \overrightarrow{AP}}$$

ist die **Führungsgeschwindigkeit** des Punktes *P*; das ist die Geschwindigkeit, die der Punkt *P* hätte, wenn er mit dem Fahrzeug starr verbunden wäre. Insgesamt gilt

$$\boxed{\vec{v}_{P\,abs} = \vec{v}_{P\,Fü} + \vec{v}_{P\,rel}}$$

Für die Berechnung der Beschleunigungen ist auszugehen von der Geschwindigkeitszerlegung

$$\left(\dot{x}_P\,\vec{e}_x + \dot{y}_P\,\vec{e}_y\right) = \left(\dot{x}_A\,\vec{e}_x + \dot{y}_A\,\vec{e}_y\right) + \left(\dot{s}_1\,\vec{e}_1 + \dot{s}_2\,\vec{e}_2\right) + \vec{\omega}_{Fü} \times \left(s_1\,\vec{e}_1 + s_2\,\vec{e}_2\right)$$

die noch einmal nach der Zeit *t* differenziert werden muss:

$$\begin{aligned}\left(\ddot{x}_P\,\vec{e}_x + \ddot{y}_P\,\vec{e}_y\right) = {} & \left(\ddot{x}_A\,\vec{e}_x + \ddot{y}_A\,\vec{e}_y\right) + \\ & + \left(\ddot{s}_1\,\vec{e}_1 + \ddot{s}_2\,\vec{e}_2\right) + \left(\dot{s}_1\,\dot{\vec{e}}_1 + \dot{s}_2\,\dot{\vec{e}}_2\right) + \\ & + \dot{\vec{\omega}}_{Fü} \times \left(s_1\,\vec{e}_1 + s_2\,\vec{e}_2\right) + \\ & + \vec{\omega}_{Fü} \times \left(\dot{s}_1\,\vec{e}_1 + \dot{s}_2\,\vec{e}_2\right) + \vec{\omega}_{Fü} \times \left(s_1\,\dot{\vec{e}}_1 + s_2\,\dot{\vec{e}}_2\right)\end{aligned}$$

Die Terme können übersichtlicher formuliert werden

$$\begin{aligned}\left(\ddot{x}_P\,\vec{e}_x + \ddot{y}_P\,\vec{e}_y\right) &= \vec{a}_{P\,abs} \\ \left(\ddot{x}_A\,\vec{e}_x + \ddot{y}_A\,\vec{e}_y\right) &= \vec{a}_{A\,abs} \\ \left(\ddot{s}_1\,\vec{e}_1 + \ddot{s}_2\,\vec{e}_2\right) &=: \vec{a}_{P\,rel} \\ \left(\dot{s}_1\,\dot{\vec{e}}_1 + \dot{s}_2\,\dot{\vec{e}}_2\right) &= \vec{\omega}_{Fü} \times \left(\dot{s}_1\,\vec{e}_1 + \dot{s}_2\,\vec{e}_2\right) = \vec{\omega}_{Fü} \times \vec{v}_{P\,rel} \\ \dot{\vec{\omega}}_{Fü} \times \left(s_1\,\vec{e}_1 + s_2\,\vec{e}_2\right) &= \dot{\vec{\omega}}_{Fü} \times \overrightarrow{AP} \\ \vec{\omega}_{Fü} \times \left(\dot{s}_1\,\vec{e}_1 + \dot{s}_2\,\vec{e}_2\right) &= \vec{\omega}_{Fü} \times \vec{v}_{P\,rel} \\ \vec{\omega}_{Fü} \times \left(s_1\,\dot{\vec{e}}_1 + s_2\,\dot{\vec{e}}_2\right) &= \vec{\omega}_{Fü} \times (\vec{\omega}_{Fü} \times \overrightarrow{AP})\end{aligned}$$

und ergeben

$$\vec{a}_{P\,abs} = \underbrace{\vec{a}_{A\,abs} + \dot{\vec{\omega}}_{Fü} \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega}_{Fü} \times (\vec{\omega}_{Fü} \times \overrightarrow{AP})}_{\vec{a}_{P\,Fü}} + \underbrace{2\,\vec{\omega}_F \times \vec{v}_{P\,rel}}_{\vec{a}_{P\,Cor}} + \vec{a}_{P\,rel}$$

Die absolute Beschleunigung des Punktes *P* besteht aus der **Führungsbeschleunigung**

$$\boxed{\vec{a}_{P\,Fü} := \vec{a}_{A\,abs} + \dot{\vec{\omega}}_{Fü} \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega}_{Fü} \times (\vec{\omega}_{Fü} \times \overrightarrow{AP})}$$

der **CORIOLISbeschleunigung**

$$\boxed{\vec{a}_{P\,Cor} := 2\,\vec{\omega}_{Fü} \times \vec{v}_{P\,rel}}$$

und der **Relativbeschleunigung**

$$\boxed{\vec{a}_{P\,rel} := \ddot{s}_1\,\vec{e}_1 + \ddot{s}_2\,\vec{e}_2}$$

$$\boxed{\vec{a}_{P\,abs} = \vec{a}_{P\,Fü} + \vec{a}_{P\,Cor} + \vec{a}_{P\,rel}}$$

$\dot{\vec{\omega}}_{Fü} = \ddot{\varphi}\,\vec{e}_z$ nennt man **Führungswinkelbeschleunigung**.

Wenn der Punkt P mit dem Fahrzeug starr verbunden ist, wird

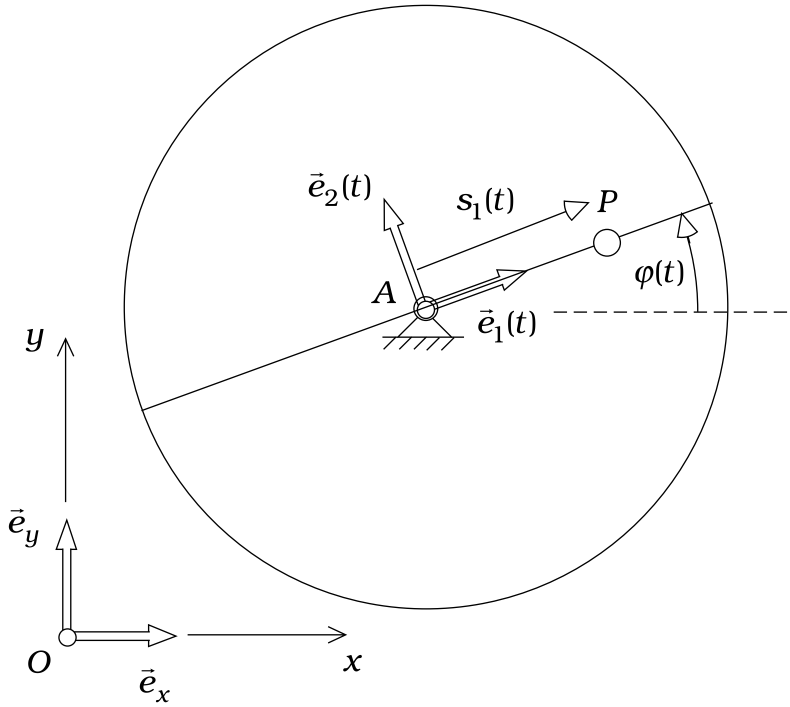
$$\vec{v}_{P\,rel} \equiv \vec{0} \qquad \vec{a}_{P\,rel} \equiv \vec{0}$$

und

$$\vec{a}_{P\,abs} = \vec{a}_{P\,Fü}$$

✎ ______________________________

Wenn sich ein Punkt P auf einer um den raumfesten Punkt A rotierenden Kreisscheibe bewegt, ist die „relative" Beschreibung der Bewegung meistens einfacher als die „absolute".



Bewegt sich beispielsweise der Punkt P auf einer Geraden in Richtung $\vec{e}_1$ durch den Drehpunkt A nach dem Gesetz einer harmonischen Schwingung mit der Amplitude L und der Schwingungsdauer T

$$s_1(t) = L\sin(2\pi\frac{t}{T})$$

so wird

$$\vec{v}_{P\,rel} = \dot{s}_1(t)\,\vec{e}_1 = 2\pi\frac{L}{T}\cos(2\pi\frac{t}{T})\,\vec{e}_1$$

$$\vec{a}_{P\,rel} = \ddot{s}_1(t)\,\vec{e}_1 = -\left(2\pi\right)^2\frac{L}{T^2}\sin(2\pi\frac{t}{T})\,\vec{e}_1$$

Mit

$$\vec{v}_{A\,abs} \equiv \vec{0} \qquad \vec{a}_{A\,abs} \equiv \vec{0} \qquad \vec{\omega}_{Fü} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3$$

$$\vec{v}_{P\,Fü} = \vec{\omega}_{Fü} \times \overrightarrow{AP} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times s_1\vec{e}_1 = s_1\dot{\varphi}\,\vec{e}_2$$

$$\vec{v}_{P\,abs} = \vec{v}_{P\,Fü} + \vec{v}_{P\,rel}$$

$$\boxed{\vec{v}_{P\,abs} = s_1\dot{\varphi}\,\vec{e}_2 + \dot{s}_1\vec{e}_1}$$

Das ist übersichtlicher als die „absolute“ Beschreibung:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \left(x_A \vec{e}_x + y_A \vec{e}_y\right) + \left(s_1 \cos(\varphi)\,\vec{e}_x + s_1 \sin(\varphi)\,\vec{e}_y\right)$$

$$\boxed{\vec{v}_{P\,abs} = \left(\dot{s}_1 \cos(\varphi) - s_1\dot{\varphi}\sin(\varphi)\right)\vec{e}_x + \left(\dot{s}_1 \sin(\varphi) + s_1\dot{\varphi}\cos(\varphi)\right)\vec{e}_y}$$

Bei der Beschreibung der Beschleunigung wird es noch deutlicher:

$$\vec{a}_{P\,Fü} = \dot{\vec{\omega}}_{Fü} \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega}_{Fü} \times (\vec{\omega}_{Fü} \times \overrightarrow{AP})$$

$$\vec{a}_{P\,Fü} = \ddot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times s_1\vec{e}_1 + \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times (\dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times s_1\vec{e}_1) = s_1\ddot{\varphi}\,\vec{e}_2 - s_1\dot{\varphi}^2\vec{e}_1$$

$$\vec{a}_{P\,Cor} = 2\,\vec{\omega}_{Fü} \times \vec{v}_{P\,rel}$$

$$\vec{a}_{P\,Cor} = 2\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times \dot{s}_1\vec{e}_1 = 2\,\dot{\varphi}\dot{s}_1\,\vec{e}_2$$

$$\vec{a}_{P\,rel} = \ddot{s}_1\,\vec{e}_1$$

$$\vec{a}_{P\,abs} = \vec{a}_{P\,Fü} + \vec{a}_{P\,Cor} + \vec{a}_{P\,rel}$$

$$\vec{a}_{P\,abs} = \left(s_1\ddot{\varphi}\,\vec{e}_2 - s_1\dot{\varphi}^2\vec{e}_1\right) + \left(2\,\dot{\varphi}\dot{s}_1\vec{e}_2\right) + \left(\ddot{s}_1\vec{e}_1\right)$$

$$\boxed{\vec{a}_{P\,abs} = \left(\ddot{s}_1 - s_1\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_1 + \left(s_1\ddot{\varphi} + 2\,\dot{\varphi}\dot{s}_1\right)\vec{e}_2}$$

Nun die „absolute“ Beschreibung:

$$\vec{a}_{P\,abs} = \dot{\vec{v}}_{P\,abs} = \frac{d}{dt}\left(\left(\dot{s}_1 \cos(\varphi) - s_1\dot{\varphi}\sin(\varphi)\right)\vec{e}_x + \left(\dot{s}_1 \sin(\varphi) + s_1\dot{\varphi}\cos(\varphi)\right)\vec{e}_y\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}_{P\,abs} = &\left\{\left(\ddot{s}_1 - s_1\dot{\varphi}^2\right)\cos(\varphi) - \left(s_1\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{s}_1\right)\sin(\varphi)\right\}\vec{e}_x + \\ &+ \left\{\left(\ddot{s}_1 - s_1\dot{\varphi}^2\right)\sin(\varphi) + \left(s_1\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{s}_1\right)\cos(\varphi)\right\}\vec{e}_y\end{aligned}}$$

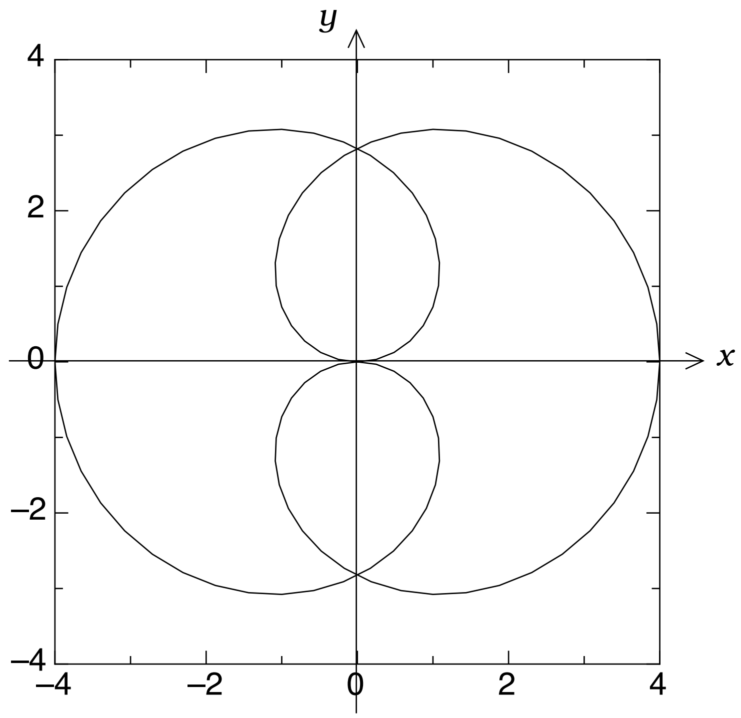
Die absolute Bahnkurve des Punktes P kann sehr kompliziert sein, auch wenn $\varphi(t)$ bloß eine lineare Funktion der Zeit ist. Für den speziellen Fall

$$x_A = y_A = 0$$

$$s_1 = L\sin(2\pi\frac{t}{T}), \qquad \varphi = \alpha\,2\pi\frac{t}{T}$$

$$L = 4, \quad T = 2, \quad \alpha = 2$$

hat die absolute Bahnkurve die Gestalt



und für $\alpha = 2{,}5$